Examen VWO

2024

tijdvak 1
donderdag 23 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

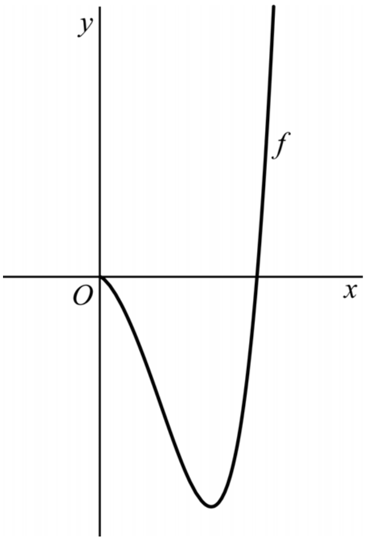
$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Stijgend en horizontaal

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^5 - 3x\sqrt{x}$.
In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1

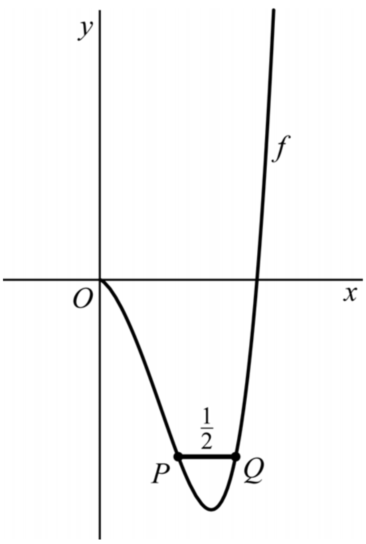


Op de grafiek ligt het punt $A(1, -2)$.

3p **1** Bewijs dat de grafiek van f in A stijgt.

Het lijnstuk PQ is horizontaal en heeft lengte $\frac{1}{2}$.
De eindpunten P en Q van dit lijnstuk liggen op de grafiek van f.
Zie figuur 2.

figuur 2



4p **2** Bereken de x-coördinaat van P. Geef je eindantwoord in drie decimalen.

Wachttijden

Een **wachttijd** is de tijd die je op een dienst moet wachten. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de tijd die nodig is om een medewerker van een klantenservice aan de telefoon te krijgen of de tijd die nodig is voordat je wordt geholpen bij de bakker.

In 1909 ontwikkelde de Deense wiskundige Agner Erlang een wiskundig model om te berekenen in hoeveel procent van de gevallen bepaalde wachttijden voorkomen. Dit percentage komt overeen met de oppervlakte onder een grafiek.

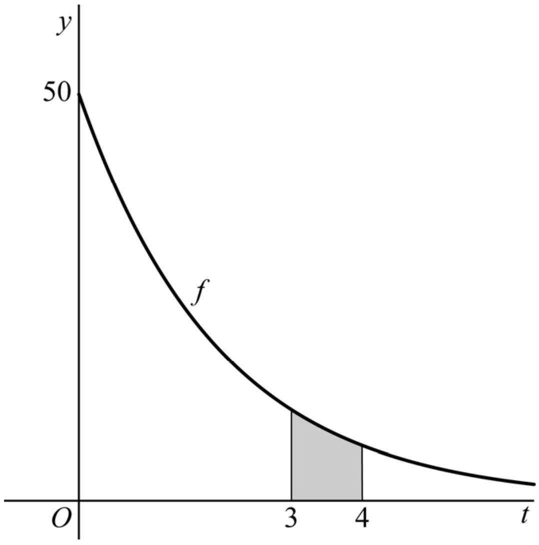
In deze opgave gaan we uit van een dienst waarbij het volgende model van Erlang hoort:

$$f(t) = 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \text{ met } t \geq 0$$

Hierbij is t de tijd in minuten.

Stel dat je wilt weten in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Je bepaalt dan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de t as en de lijnen met vergelijking $t = 3$ en $t = 4$. Deze oppervlakte blijkt (afgerond) 8,8 te zijn. Dit wil zeggen dat in 8,8% van alle gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Zie de figuur.

figuur



3p **3** Bereken algebraïsch in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 0 en 3 minuten ligt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Een wachttijd van meer dan twintig minuten komt in dit voorbeeld zelden voor. Daarom wordt de **gemiddelde wachttijd** berekend met:

$$\frac{1}{100} \cdot \int_0^{20} t \cdot f\left(t\right) \mathrm{d}t$$

Om de gemiddelde wachttijd te kunnen berekenen, maakt iemand gebruik van het gegeven dat $y = \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{at}$ een primitieve is van $y = t\mathrm{e}^{at}$ (met $a \neq 0$).

3p **4** Bewijs dat $y = \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{at}$ inderdaad een juiste primitieve is van $y = t\mathrm{e}^{at}$ voor elke waarde van a (met $a \neq 0$).

4p **5** Bereken algebraïsch de gemiddelde wachttijd in minuten voor de situatie met $f(t) = 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Verschuiven

De functie f wordt gegeven door $f(x) = (3x - 7)^2$.

De grafiek van f wordt naar rechts en omhoog verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g.

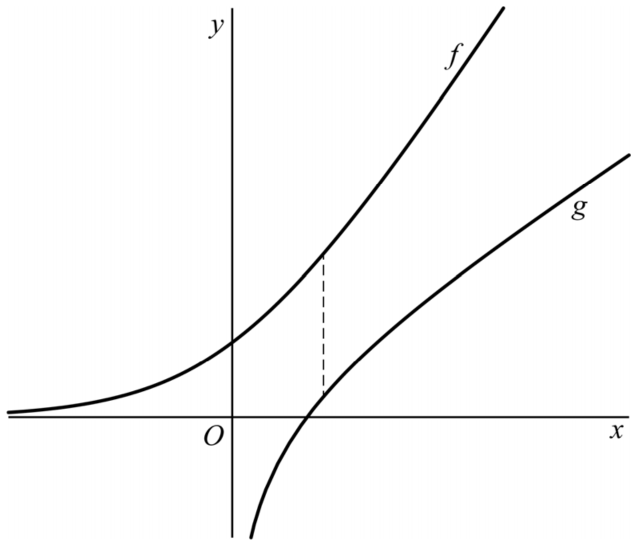
De grafiek van g gaat door het punt $A\ (5, 40)$. De helling van de raaklijn in A aan de grafiek van g is -6.

6p **6** Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = {}^{2}\log\left(\sqrt{1+8^{x}}\right)$.

De functie g is de inverse functie van f.
In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur



Het gestippelde lijnstuk in de figuur is het kortst mogelijke verticale lijnstuk dat de grafieken van f en g met elkaar verbindt.

5p **7** Bereken de lengte van dit lijnstuk. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Op de grafiek van f ligt punt P met x-coördinaat p en punt Q met x-coördinaat $p+1$.
Voor elke waarde van p kan het verschil $y_Q - y_P$ worden bepaald.

6p **8** Onderzoek op exacte wijze of er een waarde van p is waarvoor dit verschil gelijk is aan 3.

Klavertje drie

Het punt P beweegt over een baan gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_P(t) = 4\cos(t) + \cos(4t) \\ y_P(t) = 4\sin(t) + \sin(4t) \end{cases} \quad \text{met } t \text{ in seconden en } 0 \le t \le 2\pi$$

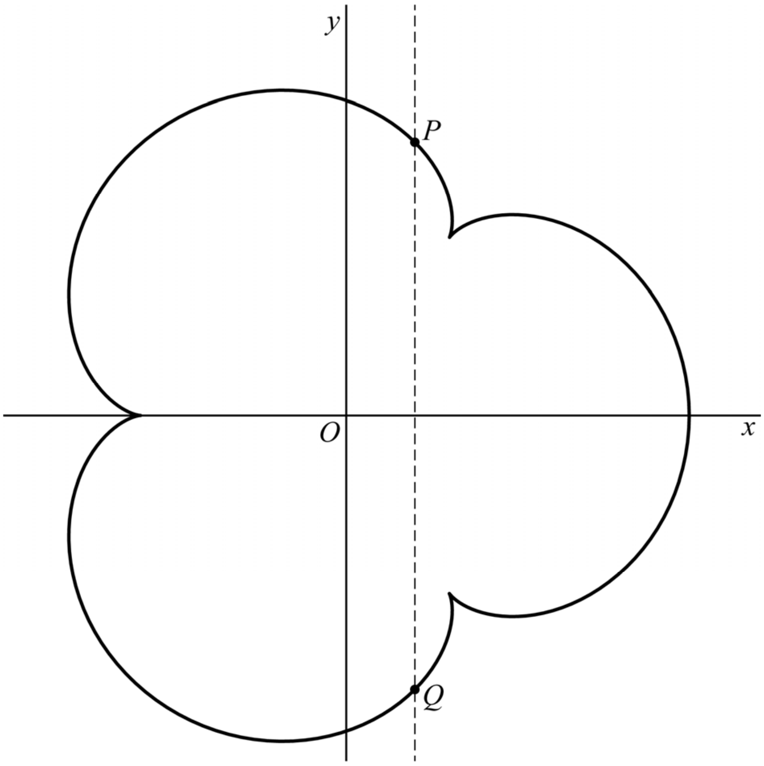
De baan waarover punt P beweegt, is weergegeven in de figuur.

Het punt Q beweegt ook over deze baan. Punt Q loopt π seconden voor op punt P. De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dus:

$$\begin{cases} x_Q(t) = 4\cos(t+\pi) + \cos(4(t+\pi)) \\ y_Q(t) = 4\sin(t+\pi) + \sin(4(t+\pi)) \end{cases} \quad \text{met } t \text{ in seconden en } 0 \le t \le 2\pi$$

Er zijn twee momenten waarop P en Q recht boven elkaar liggen, dus dan geldt $x_P = x_Q$. In de figuur is zo'n situatie weergegeven.

figuur



5p **9** Bereken exact de afstand tussen P en Q in deze situaties.

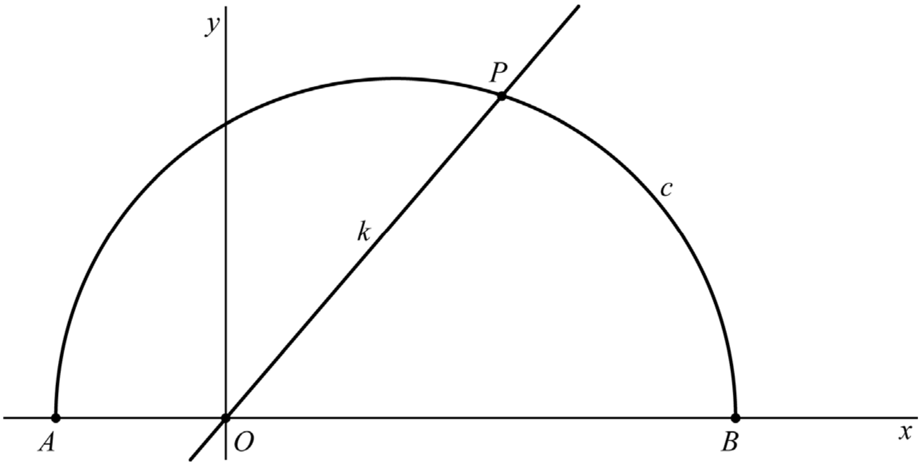
Op tijdstip $t = \frac{2}{3}\pi$ bevindt het punt P zich in $\left(-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

6p **10** Bereken exact de scherpe hoek in graden tussen de raaklijn aan de baan in punt P en de x as.

Halve cirkel

Gegeven zijn de punten $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$. Verder is gegeven de cirkel c met middellijn AB. De lijn k gaat door de oorsprong O en snijdt cirkel c in punt P. De afstand tussen O en P is gelijk is aan $2\frac{1}{2}$. In figuur 1 zijn lijn k en de bovenste helft van cirkel c getekend.

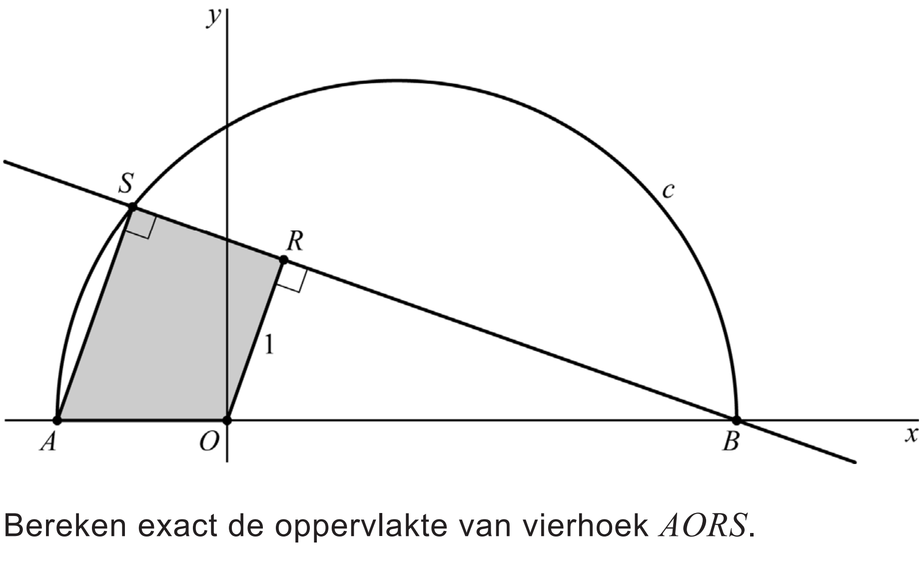
figuur 1



4p **11** Bereken exact de x-coördinaat van P.

In figuur 2 is de driehoek BRO getekend met $\angle BRO = 90°$, punt R boven de x-as en $OR = 1$. De lijn door B en R snijdt c in het punt S. Driehoek BSA is dan een driehoek met $\angle ASB = 90°$. Vierhoek $AORS$ is grijs weergegeven.

figuur 2



5p **12** Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $AORS$.

Top, asymptoot en geen perforatie

Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{ax^2 - 2}{x^2 + a}$$

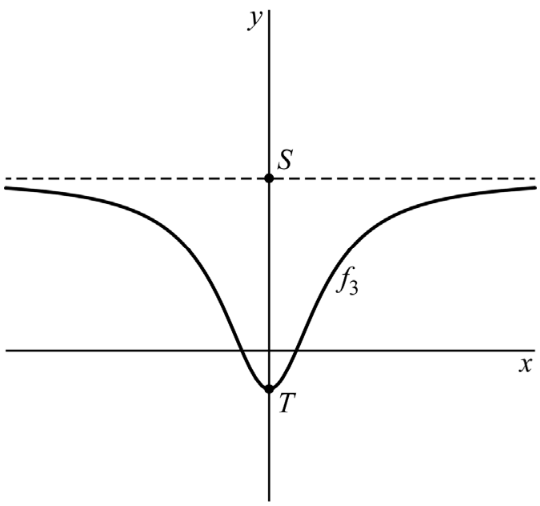
Er bestaat geen waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.

4p **13** Bewijs dit.

In het volgende onderdeel zijn de mogelijke waarden van a de positieve getallen, dus $a > 0$.

De grafiek van f_a heeft één top T en deze ligt op de y-as. Verder heeft de grafiek van f_a een horizontale asymptoot. Punt S is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de y-as. Als voorbeeld is in de figuur de grafiek van f_3 weergegeven.

figuur



De lengte van lijnstuk ST is afhankelijk van a. Deze lengte heeft een minimum.

6p **14** Bereken exact voor welke positieve waarde van a de lengte van lijnstuk ST minimaal is.

De Wet van Titius-Bode[1)] is een wet uit de astronomie die door Johann Titius werd opgesteld in de achttiende eeuw. Deze wet legt een verband tussen het **rangnummer** van een planeet en de afstand van die planeet tot de zon. Met het rangnummer van een planeet wordt bedoeld: ‘de zoveelste planeet geteld vanaf de zon’. De planeet die het dichtst bij de zon staat krijgt nummer 1, de volgende 2 enzovoorts.
De wet luidt:

$$a = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-2}$$

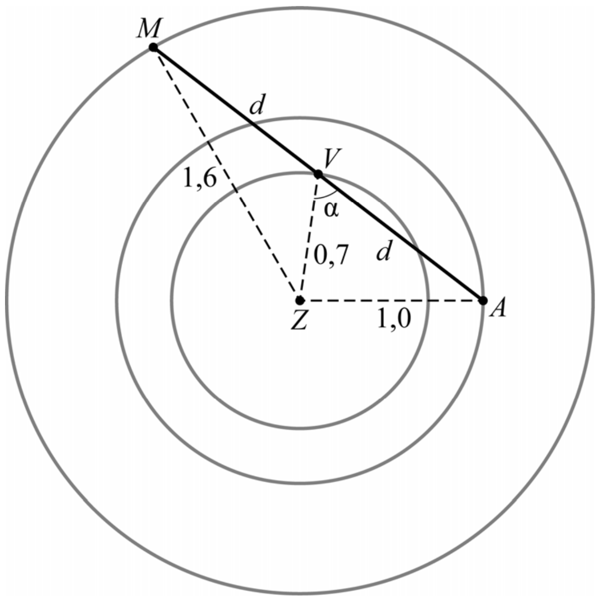
Hierin is a de afstand van de planeet tot de zon uitgedrukt in AE (Astronomische Eenheid, 1 AE = afstand van de aarde tot de zon) en is n het rangnummer van de planeet.

Saturnus heeft volgens de Wet van Titius-Bode een afstand van 10 AE tot de zon.

2p **15** Bereken exact welk rangnummer Saturnus dan zou hebben.

We bekijken de planeten Mars, Venus en de aarde. We gaan uit van het volgende eenvoudige model:
De drie planeten draaien ieder in een cirkelvormige baan met de zon als middelpunt. De drie banen liggen in één plat vlak.
De afstand van Venus tot de zon is 0,7 AE, de afstand van de aarde tot de zon is 1,0 AE en de afstand van Mars tot de zon is 1,6 AE.

figuur 1 (afstanden in AE)



Het is mogelijk dat de drie planeten op één lijn liggen waarbij Venus precies midden tussen Mars en de aarde in ligt. Deze situatie is weergegeven in figuur 1.

noot 1 Er is geen wetenschappelijke onderbouwing voor deze wet en er wordt tegenwoordig aangenomen dat de wet alleen berust op een toevallige overeenkomst met de werkelijke afstanden.

De afstand in AE van de aarde tot Venus is d en hoek AVZ in graden is α.
Met behulp van figuur 1 kan het volgende verband tussen d en α worden gevonden:

$$\frac{d^2 - 0{,}51}{\cos(\alpha)} = \frac{d^2 - 2{,}07}{\cos(180^\circ - \alpha)}$$

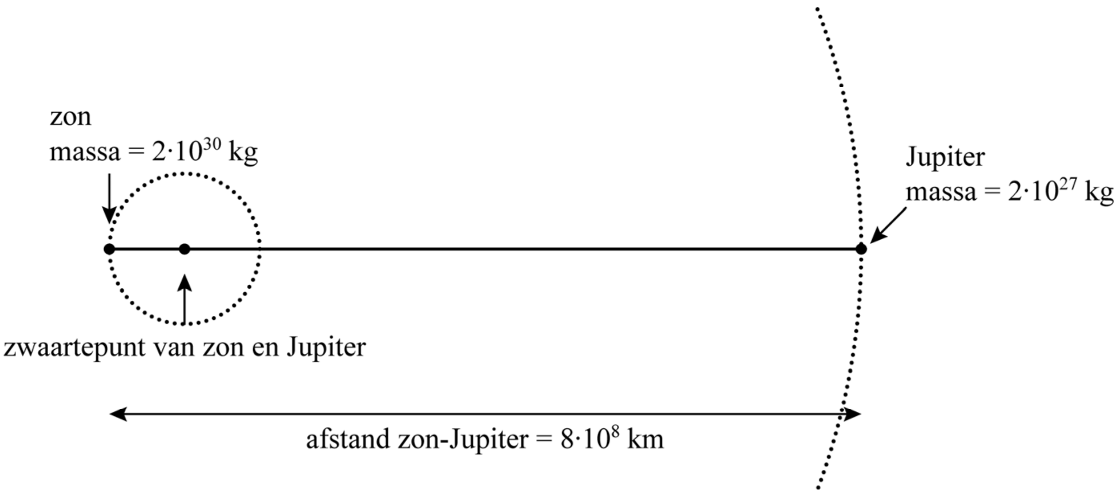
3p **16** Bewijs dat dit verband juist is.

3p **17** Bereken algebraïsch de afstand in AE van de aarde tot Venus in de gegeven situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Meestal wordt gezegd dat de planeten in ons zonnestelsel om de zon draaien. Dat klopt echter niet helemaal: de zon en de planeten draaien allemaal om hun gemeenschappelijke zwaartepunt.

Stel dat het zonnestelsel alleen zou bestaan uit Jupiter en de zon. We beschouwen deze twee hemellichamen als twee puntmassa's.
Jupiter is verreweg de zwaarste planeet in ons zonnestelsel met een massa van $2\cdot10^{27}$ kg en een afstand tot de zon van $8\cdot10^{8}$ km. De zon heeft een massa van $2\cdot10^{30}$ kg. Zie figuur 2 (niet op schaal).

figuur 2



De kleine cirkel in figuur 2 is de baan van de zon om het zwaartepunt.

4p **18** Bereken de straal van deze baan in km. Geef je eindantwoord in honderdduizendtallen.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.