College voor Examens

Werkversie syllabus wiskunde C vwo 2011 bij het conceptexamenprogramma van cTWO

Oktober 2010

Colofonpagina:

Syllabuscommissie wiskunde C, in opdracht van het College voor Examens

Joke Daemen (Universiteit Utrecht), voorzitter
Nico Alink (SLO), secretaris
Ruud Stolwijk (Cito), toetsdeskundige
Peter Kop (CvE), vaksectie wiskunde A/C
Kees Garst (NVvW), docent
Bart Zevenhek, pilotdocent
Anne van Streun (cTWO)

Voorwoord

In het kader van de vernieuwing van het onderwijs in de bètavakken in havo en vwo heeft het ministerie van OCW aan cTWO, de vernieuwingscommissie voor wiskunde, onder meer gevraagd een advies uit te brengen over beproefde examenprogramma's. CTWO heeft daartoe experimentele examenprogramma's opgesteld, die met ingang van het schooljaar 2009/2010 in een pilot op een aantal scholen uitgevoerd worden. Het betreft concept examenprogramma's die niet voor 2014 landelijk worden ingevoerd.

Ter ondersteuning van de voorbereiding op het centraal examen van deze pilot heeft het College voor Examens (CvE) drie syllabuscommissies ingesteld die de opdracht kregen voor elk examenprogramma een specificatie van de in het centraal examen te toetsen domeinen en subdomeinen te formuleren. De syllabi geven in detail aan wat gekend en gekund moet worden en als zodanig in het CE getoetst kan worden. Een syllabus geeft geen aanwijzingen ten aanzien van welke stof op welke manier onderwezen moet worden.

Deze syllabus heeft nog geen definitieve status. Hij dient de scholen die aan de examenexperimenten deelnemen voldoende houvast te bieden bij de pilot waar zij aan deelnemen. Om die reden draagt de syllabus de toevoeging *Werkversie*. De werkversies van de syllabi wiskunde zijn de basis voor de pilot waarin de haalbaarheid, onderwijsbaarheid en toetsbaarheid van de nieuwe examenprogramma's worden onderzocht.

De werkversies van de syllabi wiskunde zijn ook nog niet compleet. Zo ontbreken de voorbeelden van toetsvragen nog, waarmee het karakter van de CE-bevraging bij de nieuwe examenprogramma's wordt geïllustreerd. Op dit terrein moet nog werk worden verzet. Het ligt in de bedoeling deze onderdelen in oktober 2010 (havo) en januari 2011 (vwo) aan de werkversies van de syllabi toe te voegen.

Ruth Welman
Plv. clustermanager College voor Examens

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Deze werkversie syllabus geeft informatie ten behoeve van de voorbereiding op het centraal examen vwo wiskunde C, met name nadere specificatie van de globale eindtermen van dat deel van het experimentele examenprogramma dat centraal getoetst wordt.
De specificaties voor vwo wiskunde C in deze werkversie syllabus zijn opgesteld door de syllabuscommissie wiskunde C. Bij deze specificaties zijn voorbeeldopgaven opgenomen ter verduidelijking. In het betreffende hoofdstuk 5 wordt daar nader op ingegaan.
De syllabuscommissie heeft bij het opstellen van deze specificaties de uitgangspunten van cTWO en de uitvoerbaarheid van het programma als leidraad genomen. Afstemming met de syllabuscommissie voor wiskunde A heeft waar mogelijk plaatsgevonden. De specificaties zijn, daar waar mogelijk en naar het inzicht van de syllabuscommissie wenselijk, onderling in overeenstemming gebracht met de vakken wiskunde A voor havo en wiskunde A voor vwo.

De vernieuwingscommissie cTWO heeft een aantal uitgangspunten geformuleerd voor het examenprogramma vwo wiskunde C.

– De *doelgroep* van vwo wiskunde C wordt gevormd door leerlingen het profiel C&M. Leerlingen met dit profiel kunnen wiskunde A kiezen, mits de school dat aanbiedt.
– Wiskunde C bereidt voor op *vervolgopleindingen* van het vo in de sociale, juridische, taal- en gedragswetenschappen.
– De *inhoud* van wiskunde C richt zich op kansrekening en statistiek, op toegepaste analyse en op de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij. De inhoud ervan is niet alleen van belang voor vervolgopleidingen, maar dient ook een meer algemeen doel (denk aan redeneren, argumenteren en kritisch reflecteren).
– Wiskunde C heeft een meer *algemeen vormende waarde* door de leerlingen voor te bereiden op de (informatie)maatschappij en hen te leren in verschillende situaties wiskundige aspecten te herkennen, te interpreteren en te gebruiken. Voor de leerlingen is het van belang inzicht te krijgen in het belang van wiskunde in de maatschappij, zowel in het verleden als in het heden. Daarnaast dienen zij de mogelijkheden van wiskundige toepassingen op waarde te leren schatten. Bij wiskunde C wordt dan ook veel aandacht besteed aan toepassingen met een historische of culturele achtergrond.

De leerlingen van de wiskundevakken zetten ‘hun’ wiskunde in om problemen te analyseren en op te lossen. De verschillen tussen de vakken zitten enerzijds in het type problemen en anderzijds in de mate waarin zij zelfstandig ‘hun’ wiskunde moeten inzetten.
Bij wiskunde B kunnen de problemen zowel in een wiskundige als niet-wiskundige probleemsituatie gesitueerd zijn. Bij wiskunde A en wiskunde C zijn de problemen altijd in een niet-wiskundige probleemsituatie gesitueerd. De eindtermen moet steeds worden gelezen binnen een profielspecifieke context.
Bij het oplossen van problemen wordt bij wiskunde B een grotere mate van zelfstandigheid van de leerlingen verlangd dan bij wiskunde A, terwijl dat bij wiskunde A weer groter is dan bij wiskunde C.. Zo moet bij wiskunde C de leerling de inzet van het wiskundig gereedschap kunnen volgen en welomschreven tussenstappen zelf kunnen uitvoeren.

De syllabuscommissie heeft vervolgens het uitgangspunt gehanteerd dat op het centraal examen de opgaven steeds in een bij het profiel C&M passende probleemsituatie worden aangeboden. Er worden dan vragen gesteld die betrekking hebben op die probleemsituatie, waarbij de kandidaten hun wiskundige kennis en vaardigheden moeten laten zien. Daarbij spelen ook algebraïsche vaardigheden en rekenvaardigheden een rol. Globaal gesproken moeten de kandidaten bij wiskunde B zelf bij een probleemsituatie de wiskundige formule(s) opstellen – binnen het gespecificeerde programma, terwijl de kandidaten bij wiskunde A via tussenstappen daartoe gebracht worden. Vaak zal bij wiskunde A de formule die de probleemsituatie beschrijft, gegeven zijn. Ook bij wiskunde C zal dit het geval zijn maar daar zal de nadruk liggen op het begrijpen van gehanteerde wiskundige technieken in de probleemsituatie.

In deze syllabus treft u aan

- nadere informatie over het centraal examen (hoofdstuk 2);
- de specificaties van de globale eindtermen die in het centraal examen getoetst dienen te worden (hoofdstuk 3);
- een hoofdstuk over algebraïsche vaardigheden, met voorbeelden (hoofdstuk 4);

- voorbeeldopgaven, behorende bij de subdomeinen van het centraal examen met het bijbehorende antwoordmodel (hoofdstuk 5);
- het experimentele examenprogramma voor vwo wiskunde C (bijlage 1);
- voorbeeldeindexamenopgaven met correctievoorschrift (bijlage 2) **PM**.

2. Het centraal examen en het schoolexamen

2.1 Verdeling van de examenstof

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C, D, F en G in combinatie met de vaardigheden uit domein A.
Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft tenminste betrekking op domein A en
- domeinen E en H;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De toetsing van toepassingsgerichte vaardigheden (onderzoeken, modelleren, ICT-gebruik) is met name gesitueerd binnen het SE en kan profiel- en pakketspecifiek zijn.

In schema:

Verdeling CE – SE		
Domein	CE	SE
A Vaardigheden	X	X
B Algebra en tellen	X	
C Verbanden	X	
D Verandering	X	
E Statistiek en kansrekening		X
F Logisch redeneren	X	
G Vorm en ruimte	X	
H Keuzeonderwerp		X

Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in bijlage 1.

Van de (sub)domeinen die in het centraal examen worden getoetst staat een gedetailleerdere beschrijving in hoofdstuk 3.

2.2 Hulpmiddelen
Bij het centraal schriftelijk eindexamen mogen de kandidaten gebruik maken van een grafische rekenmachine. Door het CvE wordt jaarlijks een lijst van toegestane grafische rekenmachines gepubliceerd.
Bij het centraal examen wiskunde C worden geen formules beschikbaar gesteld.

2.3 Vakspecifieke regels correctievoorschrift

significantie
Er wordt van de kandidaten niet verlangd dat zij kennis hebben van de regels voor het aantal significante cijfers. Daarom wordt bij de vragen van het centraal examen aangegeven in welke nauwkeurigheid het antwoord dient te worden gegeven of er wordt genoegen genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

basiskennis
Het examenprogramma bouwt voort op de veronderstelde basiskennis van de onderbouw vwo.

ICT
In het centraal examen wordt met ICT de grafische rekenmachine bedoeld.

3. Specificaties van het programma van het Centraal Examen

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan

1.1 doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken.
1.2 adequaat schriftelijk, mondeling en digitaal communiceren over onderwerpen uit de wiskunde.
1.3 bij het verwerven van vakkennis en vakvaardigheden reflecteren op eigen belangstelling, motivatie en leerproces.
1.4 toepassingen en effecten van wiskunde in het dagelijks leven en in verschillende vervolgopleidingen en beroepssituaties herkennen en benoemen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

2 De kandidaat herkent de betekenis van wiskunde in maatschappij, cultuur en geschiedenis en kan deze in concrete situaties beschrijven.

De kandidaat

2.1 kan ideeën over en gebruik van wiskunde in bijvoorbeeld beeldende kunst, architectuur, dans en muziek herkennen en beschrijven.
2.2 kent van enkele wiskundige onderwerpen de ontwikkeling vanuit een cultuurhistorische context.
2.3 kan van een wiskundige modelsituatie de beperkingen en de kracht aangeven.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

3 De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.

De kandidaat

3.1 beheerst de relevante regels van de rekenkunde en algebra zonder ICT.
3.2 kan waar nodig ICT inzetten om omvangrijke of rekenintensieve problemen aan te pakken.
3.3 kan de correctheid van redeneringen verifiëren.
3.4 heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren.
3.5 kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op wiskundige juistheid.
3.6 kan op basis van een gegeven probleemsituatie een schatting maken van de uitkomst zonder deze uitkomst exact te berekenen.

Domein B: Algebra en tellen (60 slu)

Subdomein B1: Rekenen en algebra

4 De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen en kan daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen.

De kandidaat kan

4.1 berekeningen maken met en zonder variabelen waarbij gebruik gemaakt wordt van rekenregels, inclusief die van machten.
4.2 berekeningen maken met verhoudingen, breuken en procenten.
4.3 werken met haakjes en vereenvoudigen door haakjes wegwerken.
4.4 rekenregels gebruiken om algebraïsche expressies te herschrijven of te verifiëren.
4.5 werken met grootheden en samengestelde grootheden.
4.6 getallen in historisch perspectief plaatsen; denk hierbij aan π, de gulden snede en de rij van Fibonacci.
4.7 gebruik maken van de begrippen absoluut en relatief.

Subdomein B2: Telproblemen

5 De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.

De kandidaat kan

5.1 telproblemen structureren en schematiseren met behulp van bijvoorbeeld boomdiagram, wegendiagram of rooster.

5.2 gebruik maken van permutaties en combinaties.

5.3 gebruik maken van het verband tussen combinaties en de driehoek van Pascal.

Domein C: Verbanden (80 slu)

6 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de verschillende representaties doelgericht gebruiken, kan bijbehorende vergelijkingen oplossen, waar nodig met behulp van ICT, en kan periodieke verschijnselen beschrijven.

De kandidaat kan

6.1 binnen een context de verschillende representaties van een functie (formule, tabel, grafiek) doelgericht gebruiken.

6.2 de functies $f(x)=ax+b$, $f(x)=a\cdot x^n$ (n rationaal), $f(x)=b\cdot g^x$ (niet $f(x)=b\cdot e^x$) en $f(x)={}^g\log x$ (niet $f(x)=\ln x$) en hun grafieken herkennen en gebruiken met hun specifieke eigenschappen.

6.3 logaritmische functies gebruiken als inverse van exponentiële functies, zonder daarbij de rekenregels voor de logaritme te gebruiken.

6.4 functies gebruiken om probleemsituaties te modelleren.

6.5 verbanden van de vorm $y=a\cdot x$ (evenredigheid) en van de vorm $y=\frac{a}{x}$ (omgekeerd evenredigheid) herkennen en gebruiken.

6.6 functies samenstellen en optellen in een profielspecifieke probleemsituatie.

6.7 van een periodieke beweging de periode, amplitude en de evenwichtswaarde bepalen.

6.8 interpoleren, extrapoleren en een trend beschrijven aan de hand van een gegeven model.

6.9 vergelijkingen en ongelijkheden in een probleemsituatie oplossen met behulp van verschillende representaties, inclusief het functioneel gebruik van de abc-formule.

6.10 een logaritmische schaalverdeling gebruiken.

Domein D: Veranderingen (60 slu)

7 De kandidaat kan het veranderingsgedrag van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en de regelmaat in rijen doelgericht beschrijven en gebruiken.

De kandidaat kan

7.1 het veranderingsgedrag van functies genoemd in 7 herkennen en beschrijven met behulp van hun grafieken, tabellen en formules.

7.2 het veranderingsgedrag van functies beschrijven op basis van een gegeven formule en dit in verband brengen met de probleemsituatie.

7.3 vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van de grafiek van een functie en tevens vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.

7.4 de gemiddelde verandering op een interval berekenen en interpreteren.

7.5 de helling van grafieken in verschillende punten met elkaar vergelijken.

7.6 bij een rij getallen zowel met een recursief voorschrift als met een directe formule werken.

7.7 een directe formule opstellen bij rijen die corresponderen met een lineair of exponentieel verband.

7.8 een recursieve formule opstellen bij een gegeven rij getallen.

7.9 bij een rij getallen de begrippen somrij en verschilrij gebruiken.

Domein F: Logisch redeneren (40 slu)

13 De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.

De kandidaat kan

13.1 de correctheid van redeneringen en daarbij horende conclusies, zoals gebruikt in het maatschappelijk debat, verifiëren en analyseren.

13.2 drogredeneringen en paradoxen herkennen en beschrijven.

13.3 verschillende representaties, zoals tabel en diagram, gebruiken bij het analyseren en oplossen van logische problemen.

Domein G: Vorm en ruimte (40 slu)

14 De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en conclusies trekken over vorm en oppervlakte van zo'n object.

De kandidaat kan

14.1 bij het beschrijven van meetkundige vormen, bijvoorbeeld in kunstwerken, gebruik maken van gelijkvormigheid en symmetrie.

14.2 aanzichten en éénpuntsperspectief tekeningen maken van een eenvoudige ruimtelijk figuur (kubus, balk, piramide).

14.3 vanuit een perspectieftekening en/of gegeven aanzichten een ruimtelijk figuur beschrijven.

14.4 een perspectieftekening van een eenvoudige ruimtelijk figuur verder af maken.

14.5 op basis van perspectiefeigenschappen beoordelen of een afbeelding, bijvoorbeeld een foto of schilderij, mogelijk een ruimtelijk figuur weergeeft.

14.6 beoordelen of in een tekening regels voor perspectief goed zijn toegepast.

14.7 gebruik maken van de oppervlakte van eenvoudige meetkundige figuren en van de inhoud van eenvoudige ruimtefiguren om daarmee de oppervlakte en de inhoud van een ruimtelijk figuur te schatten.

14.8 berekeningen uitvoeren m.b.t. de inhoud en de oppervlakte van gelijkvormige figuren.

4. Algebraïsche vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de eisen wat betreft algebraïsche vaardigheden beschreven voor de examenkandidaten wiskunde havo en vwo, voor de programma's wiskunde C (alleen vwo), wiskunde A en wiskunde B. De syllabuscommissies vinden het nodig voor algebra de overeenkomsten en verschillen voor deze vakken zo duidelijk mogelijk te omschrijven. Enkele argumenten hiervoor zijn:

- docenten (en leerlingen) moeten een helder beeld hebben van de eisen die per vak worden gesteld aan het beheersen van algebraïsche vaardigheden,
- het vervolgonderwijs moet duidelijk worden gemaakt op welke vaardigheden mag worden gerekend, gegeven de beperkte tijd die beschikbaar is voor het wiskundeonderwijs.

In paragraaf 4.1 gaan we in op specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden en de rol die de rekenmachine hierbij speelt. In paragraaf 4.2 staat de lijst van specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden. Per programma, havo A, havo B, vwo C, vwo A en vwo B, is aangegeven welke vaardigheden van toepassing zijn. In paragraaf 4.3 geven we specifiek voor wiskunde A van het vwo een aantal voorbeelden van de specifieke algebraïsche vaardigheden die in sommige gevallen ontleend zijn aan opgaven in deze syllabus of aan 'oude' examenopgaven.
In de syllabi voor wiskunde A en B van het vwo is in bijlage 4 de lijst formules opgenomen zoals die bij het betreffende eindexamen wordt afgedrukt. Bij de eindexamens wiskunde voor havo A en B en voor vwo wiskunde C wordt geen lijst met formules afgedrukt.

4.1 Specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden

Algebraïsche vaardigheden zijn geen doel in zichzelf, maar onderdeel van wiskundige activiteiten. Door algebraïsche expressies te bewerken kunnen we bijvoorbeeld de juistheid van beweringen aantonen, kunnen we het rekenwerk vaak vereenvoudigen en kunnen we vergelijkingen zo herschrijven dat ze exact zijn op te lossen.
Om verder te verduidelijken wat van de examenkandidaten wordt verwacht maken we een onderscheid tussen specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.

Specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden
Bij *specifieke* algebraïsche vaardigheden gaat het om parate kennis en het vlot kunnen toepassen van de bijbehorende vaardigheden op de voorkomende algebraïsche expressies. Deze vaardigheden hebben betrekking op algoritmisch werken en algebraïsch rekenen. Het gaat hier bijvoorbeeld om kennis en gebruik van rekenregels, inclusief het werken met haakjes, bij het invullen van getallen of variabelen in een expressie en het gebruik van algoritmen om een vergelijking op te lossen.
Bij *algemene* algebraïsche vaardigheden spelen aspecten als aanpak, globale strategie, het herkennen van structuren en methoden, en doelgerichtheid een rol. Leerlingen moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, moeten kwalitatief kunnen redeneren aan de hand van een formule (zoals stijgen/dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag), moeten een formule kunnen opstellen door het generaliseren van getallenvoorbeelden of het combineren van bekende formules, moeten verbanden zien tussen de verschillende representaties van een functie en moeten kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en betekenis toekennen aan de variabelen en parameters. Bij deze algemene algebraïsche vaardigheden wordt een beroep gedaan op de denkactiviteiten zoals genoemd in het visiedocument van cTWO.
Samenvattend zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de examenkandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de examenkandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen.

Gebruik van de GR
Bij wiskunde C en wiskunde A is het gebruiken van wiskundig gereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen. Omdat in toepassingen veelal met benaderde waarden van grootheden wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet. Daar waar de nadruk ligt op globale, meestal kwalitatieve redeneringen wordt eventueel gebruik van de GR niet beloond via de normering.
Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook exacte wiskundige modellen voorkomen die met behulp van algebra moeten worden opgelost. Ook hier wordt eventueel gebruik van de GR niet beloond via de normering.

Per vak zullen de eisen met betrekking tot specifieke vaardigheden verschillen: bij wiskunde B zal het repertoire aan parate kennis en vaardigheden groter zijn dan bij wiskunde C of A. Ook het aantal denk- of rekenstappen om tot een oplossing te komen, zal bij wiskunde B groter kunnen zijn.
In de volgende voorbeelden proberen we deze verschillen tussen wiskunde A, B en C te illustreren.

Voorbeeldopgave 1 (vwo)

Wiskunde B: Gegeven is de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, waarbij I_0 een constante is.

Hoe verandert de waarde van G als I twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.

Wiskunde A: Het geluidsniveau G (in dB) is afhankelijk van de intensiteit I van het geluid (in W/m^2). Het verband wordt gegeven door de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a. Toon aan dat de formule te herschrijven is tot $G = 10 \cdot \log(I) + 120$.

Als I verdubbeld wordt, dan zal G (ongeveer) 3 groter worden.
b. Toon dit aan door de formules $G = 10 \cdot \log(2I) + 120$ en $G = 10 \cdot \log(I) + 120$ te vergelijken.

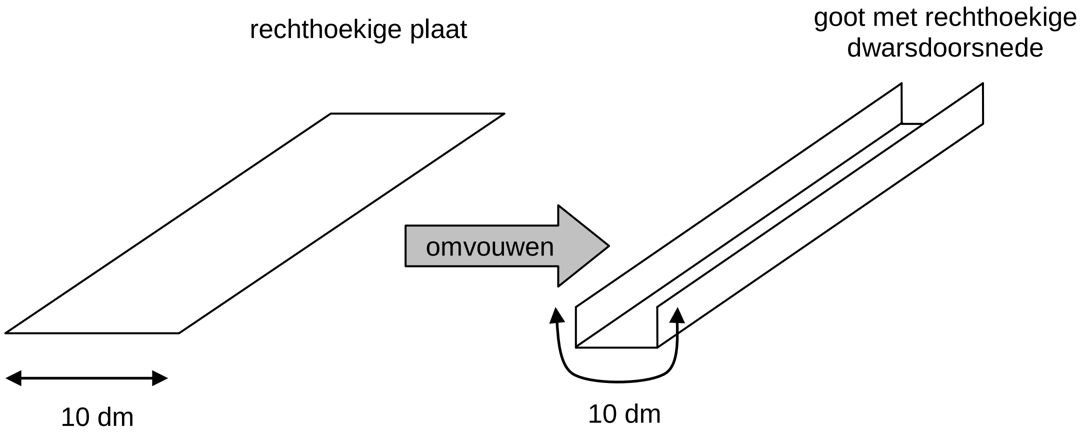
Wiskunde C: Het geluidsniveau G (in dB) is afhankelijk van de intensiteit I van het geluid (in W/m^2). Het verband wordt gegeven door de formule $G = 10 \cdot \log(I) + 120$.

Onderzoek door middel van getallenvoorbeelden hoe G verandert als I verdubbeld wordt.

Bij alle vakken (wiskunde A, B en C) kan ook een formule voor I uitgedrukt in G, gevraagd worden.

Voorbeeldopgave 2 (havo en vwo)

Van een lange rechthoekige plaat met een breedte van 10 dm wordt aan weerszijden een even brede rand omgevouwen zodat een goot ontstaat met een rechthoekige dwarsdoorsnede. Zie de tekening.



Wiskunde B:
a. Bereken hoe groot de oppervlakte van de dwarsdoorsnede maximaal kan zijn.
Voor de volgende vraag heeft de lange rechthoekige plaat een breedte van a (in dm).
b. Bereken hoe de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede afhangt van a.

Wiskunde A:

a. Toon aan dat de oppervlakte A van de dwarsdoorsnede gelijk is aan $A = 10x - 2x^2$ (x in dm en A in dm^2), waarbij x de hoogte is van de goot.
b. Bereken de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede. (eventueel: Bereken met behulp van de afgeleide de maximale oppervlakte)

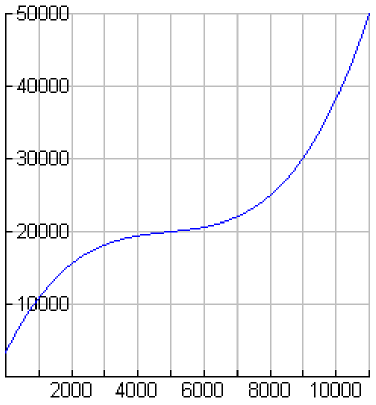
Wiskunde C:
In de tabel hieronder zie je het verband tussen de hoogte x van de goot en de oppervlakte van de dwarsdoorsnede.

Hoogte x (in dm)	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	…..	
Oppervlakte (in dm^2)	8	9,12	10,08	10,88	11,52	12	12,32	…..	

a. Bereken de oppervlakte bij een hoogte van $x = 2,6$.
b. Maak een formule voor de oppervlakte van de dwarsdoorsnede, uitgedrukt in x.
c. Onderzoek, met tabel of formule, bij welke hoogte de oppervlakte van de dwarsdoorsnede maximaal is.

Voorbeeldopgave 3 (havo)

In een bedrijf dat verpakkingen produceert wordt het verband tussen de totale kosten TK (in euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q gegeven door de functie $TK = 0,00000012q^3 - 0,00177q^2 + 9,2q + 3250$.
Hiernaast zie je de grafiek van TK.



Wiskunde B:
a. Toon aan met behulp van de afgeleide dat TK stijgt tussen $q = 0$ en $q = 10\,000$.

De gemiddelde kosten GK worden berekend met de formule $GK = \dfrac{TK}{q}$.

b. Bereken GK voor $q = 10\,000$ met behulp van de formule en geef aan hoe je GK kunt aflezen uit de grafiek.
c. De formule voor GK is te herschrijven in de vorm $GK = a \cdot q^2 + b \cdot q + c + d \cdot q^{-1}$. Geef a, b, c en d.
d. Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van q de gemiddelde kosten minimaal zijn. Geef aan hoe je dit minimum uit de grafiek kunt aflezen.

Wiskunde A:

De gemiddelde kosten GK worden berekend met de formule $GK = \dfrac{TK}{q}$.

a. Bereken GK voor $q = 10\,000$ met behulp van de formule.
b. Bereken de minimale gemiddelde kosten. (*)

De formule van GK kan geschreven worden in de vorm: $GK = F + \dfrac{3250}{q}$ waarbij F een formule is die hoort bij een tweedegraads verband.

c. Geef de formule voor F.

(*) Leerlingen mogen dit dus met de GR bepalen

4.2 Algebraïsche vaardigheden, een overzicht

In het volgende overzicht hanteren we het in paragraaf 4.1 beschreven onderscheid in specifieke en algemene vaardigheden. De algebraïsche vaardigheden moeten in samenhang met het betreffende programma worden gelezen. De opsomming is indicatief.
Vervolgens worden in paragraaf 4.3 bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke specifieke vaardigheden van een kandidaat worden verwacht.
Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) reeds bekend verondersteld mag worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.
Op de plaats van A, B, C en D in de volgende tabel kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $ax+b$, $\frac{a}{x}$ en x^2.
Niet aan de orde komen de regels die horen bij het differentiëren.

De vaardigheden genoemd bij categorieën A t/m D moeten in beide richtingen kunnen worden uitgevoerd, tenzij anders is vermeld.
Beperkende voorwaarden zoals bijvoorbeeld: noemers van breuken zijn ongelijk 0, vormen onder worteltekens zijn groter dan of gelijk aan 0, zijn niet altijd vermeld.

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
A. Breukvormen	1. $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$	x	x	x	x	x
	3. $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}=\frac{A}{C}\cdot B=A\cdot B\cdot\frac{1}{C}$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{A}{\frac{B}{C}}=\frac{A\cdot C}{B}$	x	x	x	x	x
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$ mits $A, B\geq 0$	x	x	x	x	x
	2. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ mits $A\geq 0$, $B>0$	x	x	x	x	x
C. Bijzondere producten	1. haakjes wegwerken en ontbinden in factoren: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	2. $(A+B)(C+D)=AB+AD+BC+BD$	x	x	x	x	x
	3. $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$		x			x
	4. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$		x			x
	5. kwadraat afsplitsen: x^2+px+q schrijven in de vorm $(x+r)^2+s$		x			x

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
D. Machten en logaritmen	1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	x	x	x	x	x
	2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	x	x	x	x	x
	3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	x	x	x	x	x
	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	x	x	x	x	x
	5. $\dfrac{1}{a^p} = a^{-p}$	x	x	x	x	x
	6. $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ met p positief en geheel		x	x	x	x
	7. ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$		x		x	x
	8. ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log(\frac{a}{b})$		x		x	x
	9. ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$		x		x	x
	10. ${}^g\log(a) = \dfrac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ vwo C: alleen $p = 10$		x	x	x	x
	11. ${}^g\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(g)}$				x	x
E. Goniometrie	voor formules zie betreffende domein		x			x
F. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A tot en met D	1. via substitutie van getallen	x	x	x	x	x
	2. via substitutie van expressies	x	x	x	x	x
	3. via het omwerken van formules	x	x	x	x	x
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \; of \; B = 0$	x	x	x	x	x
	2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \; of \; B = C$ vwo C en havo A: $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \Rightarrow B = C$	x	x	x	x	x
	3. $\dfrac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	4. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \; of \; A = -B$		x		x	x
	6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ mits $A, B \geq 0$	x	x	x	x	x

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
H. Vergelijkingen oplossen via algoritmen	1. eerstegraadsvergelijkingen $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$	x	x	x	x	x
	2. tweedegraadsvergelijkingen abc-formule $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$		x			x
	3. $x^n=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{n}}$ als n oneven is	x	x	x	x	x
	$x^n=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{n}}$ of $x=-c^{\frac{1}{n}}$ als n even is	x	x	x	x	x
	4. $g^x=a \Rightarrow x={}^g\log(a)$		x	x	x	x
	5. $e^x=a \Rightarrow x=\ln(a)$				x	x
	6. ${}^g\log(x)=b \Rightarrow x=g^b$		x	x	x	x
	7. $\ln(x)=b \Rightarrow x=e^b$				x	x
	8. $\lvert x\rvert=c \Rightarrow x=c$ of $x=-c$					x
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties	1. $f(A)=c$		x			x
	2. $f(A)=f(B)$		x			x
K. Vergelijkingen en ongelijkheden van het type $f(x)=g(x)$ resp. $f(x)\geq g(x)$ oplossen	1. grafisch, waaronder ICT	x	x	x	x	x
	2. exact, indien f en g lineair zijn	x	x	x	x	x
	3. vergelijkingen en ongelijkheden die niet vallen onder 2. exact, indien mogelijk		x		x	x

		havo		vwo		
Algemene vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
L. Formules opstellen	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfunctie					
	a. eerstegraads/lineaire functie	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfunctie		x		x	x
	c. exponentiële functie	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functie		x		x	x
	e. goniometrische functie		x		x	x
	f. machtsfunctie		x		x	x
	g. absolute waarde functie					x
	3. door generaliseren via getallenvoorbeelden	x	x	x	x	x
	4. door schakelen van formules	x	x	x	x	x
M. Expressies herkennen	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	a. eerstegraads/lineaire functies	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfuncties	x	x	x	x	x
	c. exponentiële functies	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functies		x	x	x	x
	e. goniometrische functies		x		x	x
	f. machtsfuncties	x	x	x	x	x
	2. structuur van een expressie vaststellen	x	x	x	x	x
	3. rol van een voorkomende parameter bepalen	x	x		x	x
N. Karakteristieken bepalen	kwalitatief redeneren over expressies of delen daarvan met betrekking tot karakteristieken als					
	a. uiterste waarden	x	x	x	x	x
	b. stijgen of dalen	x	x	x	x	x
	c. symmetrie		x		x	x
	d. asymptotisch gedrag	x	x	x	x	x
O. Algebraïsche expressies reduceren en representeren	1. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan	x	x		x	x
	2. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren		x			x
	3. flexibel verschillende representaties van functies (formule, tabel, grafiek) kunnen inzetten en tussen deze representaties kunnen wisselen	x	x	x	x	x

4.3 Voorbeeldvragen (specifieke en algemene) algebraïsche vaardigheden wiskunde C vwo.

Hieronder worden voorbeeldvragen genoemd om de algebraïsche vaardigheden te illustreren. Deze vaardigheden worden binnen een context getoetst. Een aantal van deze voorbeelden is afkomstig uit de voorbeeldopgaven uit hoofdstuk 5, aangevuld met voorbeelden onder andere uit de werkversie van de syllabus wiskunde A havo 2011 en de syllabus wiA vwo 2010.
De opsomming hieronder is indicatief en gekoppeld aan de indeling van de vaardigheden in de vorige paragraaf.
Sommige voorbeelden komen bij meerdere categorieën voor, zij spelen in op meerdere vaardigheden.

Categorie A. Breukvormen
1. Schrijf $y=\frac{2}{x}+3$ in de vorm: $y=\frac{......}{......}$ (als een breuk)
2. Ontleend aan werkversie syllabus wiA havo 2011. De formules $G=100\cdot L-110$ en $BMI=\frac{1}{L^2}\cdot G$ combineren tot $BMI=\frac{.....}{.....}$.
3. Schrijf $y=\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x-2}$ in de vorm: $y=\frac{.....}{.....}$ (als een breuk)
4. Schrijf $y=\frac{6}{\frac{3}{x}}$ in de vorm: $y=\frac{.....}{.....}$ (als een breuk)
Categorie B. Wortelvormen
1. Ontleend aan syllabus wiA vwo 2010. $D=6{,}9\cdot\sqrt{T-12}$ herleiden tot $D=\sqrt{47{,}61T-571{,}32}$
2. $\frac{\sqrt{50N}}{\sqrt{5}}=\sqrt{10N}$
C. Bijzondere producten
1. Schrijf zonder haakjes: $(x-3)(x+2)$
2. Schrijf $y=2(x-3)^2+9$ in de vorm: $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$
3. Toon met een berekening aan dat de grafiek van $y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x+1)-\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x-5)$ een rechte lijn is.
D. Machten en logaritmen
1. Werk de haakjes weg: $y=3\cdot(a\cdot b)^2$
2. Schrijf $2x^2\cdot(x^4)^2$ in de vorm $a\cdot x^n$
3. Ontleend aan opgave 4 Tandarts van hoofdstuk 5, vraag d. $0{,}3=V\cdot 0{,}962^d$ omwerken tot $V=.....$
4. Ontleend aan opgave 4 Tandarts van hoofdstuk 5, vraag e. $0{,}962^d=\frac{0{,}3}{V}$ omwerken tot $d=.....$
5. Ontleend aan opgave 4 Tandarts van hoofdstuk 5, vraag b. $(0{,}1)^{\frac{1}{60}d}$ herleiden tot (bij benadering) $0{,}962^d$.
F. Herleidingen uitvoeren
1. Ontleend aan werkversie syllabus wiA havo 2011. De formules $G=100\cdot L-110$ en $BMI=\frac{1}{L^2}\cdot G$ combineren tot $BMI=\frac{.....}{.....}$.
2. Gegeven $y=x+3$ en $z=4y^2$. Druk nu z uit in x en wel in de vorm $z=a\cdot x^2+b\cdot x+c$
3. Ontleend aan conceptsyllabus wiA havo 2011. Laat zien dat uit $\frac{f\cdot d}{v}=0{,}3$ en $v=15$ volgt dat $f=\frac{4{,}5}{d}$.

4. Toon aan dat $(x-2)\cdot\frac{180}{x}=180-\frac{360}{x}$
5. Gegeven is $2\cdot\log(N)=8-3B$. Werk dit om tot $N=.....$
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen
1. Los de vergelijking $x\cdot(x-2)=0$ op.
2. Los de vergelijking $\frac{6x}{x+2}=4$ op.
3. Verhoudingen omwerken, zie opgave 12 Jan Dibbets van hoofdstuk 5, vraag b.
4. Lengte van een lijnstuk berekenen met behulp van verhoudingen, zie opgave 12 Jan Dibbets van hoofdstuk 5, vraag d.
5. Ontleend aan syllabus wiA, havo 2010. Gegeven zijn $C=12\cdot\frac{G}{V}-2$, $G=42$ en $C=7,7$. Bereken V.
H. Vergelijkingen oplossen met behulp van algoritmen
1. De lijn $y=2(x-4)+4(x-7)$ snijdt de x-as in punt *A*; bereken de x-coördinaat van *A*.
2. Het gebruiken van gegeven rekenregel, zie opgave 14 Schoolreis van hoofdstuk 5, vraag a.
K. Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen
1. Ontleend aan werkversie syllabus wiA HAVO 2011. Los de vergelijking $L-110=45,4+0,89(L-152,4)$ op.
2. Ontleend aan opgave 14 Schoolreis van hoofdstuk 5, vraag d. Snijpunt berekenen van de lijnen $A=12+6p$ en $A=9+14p$.
3. Gegeven zijn de lijnen $y_1=3x+10$ en $y_2=2,5x+16$ Bereken voor welke waarden van x geldt dat $y_1>y_2$.
4. Ontleend aan opgave 13 Aandeel van hoofdstuk 5, vraag c. De vergelijking $1,11^T=2$ oplossen.
5. Ontleend aan opgave 4 Tandarts van hoofdstuk 5, vragen a en c. De vergelijking $2,5\cdot 0,1^t=0,3$ oplossen. De vergelijking $0,3=10\cdot 0,962^d$ oplossen.
6. Ontleend aan opgave 13 Aandeel van hoofdstuk 5, vraag b. De vergelijking $g^{67}=1000$ oplossen.
7. Ontleend aan opgave 4 Tandarts van hoofdstuk 5, vraag c. De vergelijking $0,3=V\cdot 0,962^{10}$ oplossen.

5. Voorbeeldopgaven

In dit hoofdstuk treft u een aantal opgaven aan waarin de verschillende (sub)domeinen van het CE-programma aan de orde komen.
In onderstaande tabel staat de verdeling van de (sub)domeinen over deze opgaven vermeld. In de laatste vier opgaven komen telkens twee domeinen voor (domeinen B en C). In tabel is volstaan met het noemen van de bedoelde specificaties uit deze twee domeinen.

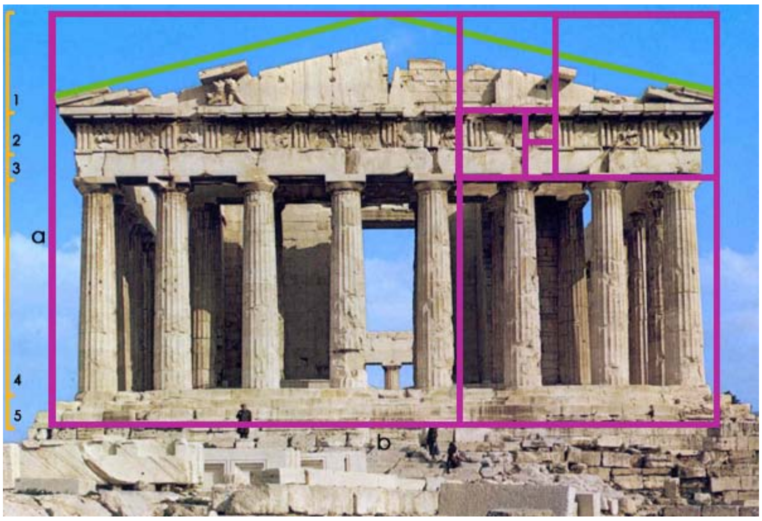
Verdeling (sub)domeinen over de voorbeeldopgaven conceptsyllabus wiC.

	Voorbeeldopgave	(sub)domein	
1 2	Parthenon Holocaustmonument	B1	De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen en kan daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen.
3	Sol Lewitt	B2	De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.
4	Tandarts	C	De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de verschillende representaties doelgericht gebruiken, kan bijbehorende vergelijkingen oplossen, waar nodig met behulp van ICT, en kan periodieke verschijnselen beschrijven.
5	Varkenspest Bewerking opgave van examen wA1 2006 2e tijdvak	D	De kandidaat kan het veranderingsgedrag van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en de regelmaat in rijen doelgericht beschrijven en gebruiken.
	Logisch redeneren	F	De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.
6 7	Krantenartikel Zwart-Wit		13.1. De kandidaat de correctheid van redeneringen en daarbij horende conclusies, zoals gebruikt in het maatschappelijk debat, verifiëren en analyseren.
8 9	Tien gasten De paradox van de krokodil		13.2. De kandidaat kan drogredeneringen en paradoxen herkennen en beschrijven.
10	Roken		13.3. De kandidaat kan verschillende representaties, zoals tabel en diagram, gebruiken bij het analyseren en oplossen van logische problemen.
11	Duccio	G	De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en conclusies trekken over vorm en oppervlakte van zo'n object.
12	Jan Dibbets	G	De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en conclusies trekken over vorm en oppervlakte van zo'n object.
Bij de volgende opgaven wordt een beroep gedaan op de domeinen B en C. Volstaan wordt met het aangeven van de specificaties waar het om gaat.			
13	Aandeel		Vraag a. 6.10 Vraag c. 4.1 en 6.9 Vraag b. 4.1 en 6.4
14	Schoolreis		Vraag a. 4.1 en 4.2 Vraag c. 4.1 en 4.2 Vraag b. 4.2 Vraag d. 6.1 en 6.4 en 6.9
15	Soorten dieren		Vraag a. 4.1 en 4.2 Vraag d. 6.1 en 6.10 Vraag b. 6.2 Vraag e. 6.1 Vraag c. 4.1 en 4.5 en 6.9
16	Veevoeder Examen wA Havo 1992 1e tijdvak		Vraag a. 4.1 en 4.2 en 6.1 Vraag d. 6.4 Vraag b. 4.3 Vraag e. 4.3 en 6.6 Vraag c. 4.1 en 6.6

Opgave 1 Parthenon

Er wordt vaak beweerd dat de verhouding van de gulden snede gebruikt is bij het ontwerp van het Parthenon, een bekende Griekse tempel op de Acropolis in Athene. Het gebouw is nu een ruïne, maar vroeger was de bovenkant van het gebouw nog wat hoger. Dat kun je aan de zijkanten nog zien. De schuine lijnen geven aan hoe het gebouw er vroeger uitzag. Als je een rechthoek om de contouren van het gebouw tekent, krijg je een **Gulden Rechthoek**. Dat betekent dat de verhouding van de hoogte en de breedte van het gebouw gelijk is aan de gulden snede.

Foto



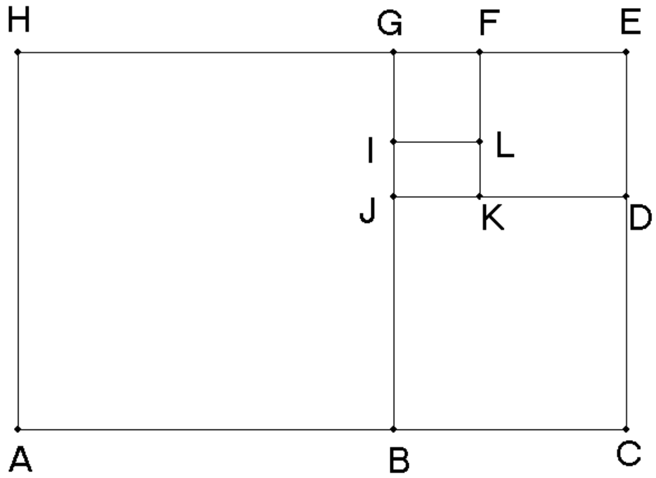
Het bijzondere van de Gulden Rechthoek is dat na het weghalen van een perfect vierkant uit de Gulden Rechthoek, de overblijvende rechthoek weer een Gulden Rechthoek is.

a. Meet de zijden van de grootste in de foto getekende rechthoek op en laat door een berekening zien dat deze inderdaad een gulden snede verhouding kan hebben.

b. Geef een voor- en een tegenargument voor de bewering dat de gulden snede verhouding bewust gebruikt is voor het ontwerp van het Parthenon.

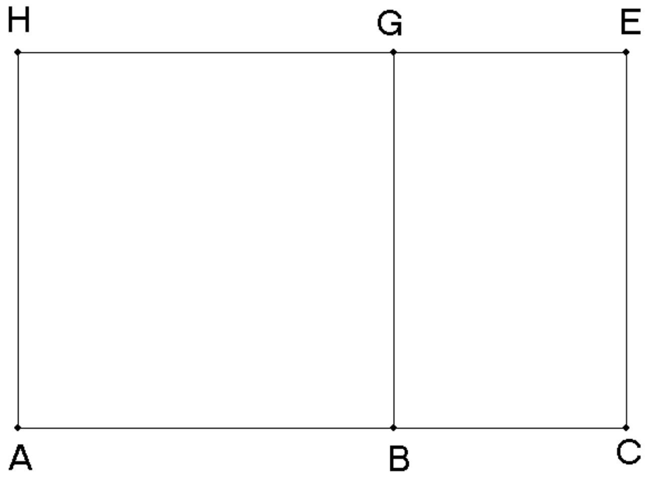
We bekijken in de rest van de opgave onderstaande figuur 1. Deze figuur zie je ook afgebeeld op de foto. In de figuur is ACEH de in de tekst bedoelde Gulden Rechthoek.

figuur 1



De Gulden Rechthoek ACEH zie je hieronder in figuur 2 nogmaals weergegeven.

figuur 2



c. Geef in figuur 2 aan hoe hieruit figuur 1 kan ontstaan door een aantal extra lijnstukken te tekenen. Licht je werkwijze toe en geef aan in welke volgorde je de extra lijnstukken tekent.

De verhouding van de gulden snede zie je in figuur 1 terug in de verhouding van de lengtes van AC en AH en in de verhouding van de lengtes van JK en IJ. Ook zie je deze verhouding in de verdeling van sommige lijnstukken. Zo wordt het lijnstuk AC verdeeld in lijnstuk AB en lijnstuk BC. De verhouding van de lengtes van AB en BC is gelijk aan de gulden snede.
Ook bij de verdeling van andere lijnstukken zie je de gulden snede terug.

d. Geef drie lijnstukken uit figuur 1, met de verdeling, die verdeeld worden volgens de gulden snede.

De rechthoek IJKL in figuur 1 is een Gulden Rechthoek. We kiezen de afmetingen in deze rechthoek als volgt: $\text{IJ} = 1$ en $\text{JK} = \varphi$ ($\approx 1{,}618...$).
Op basis hiervan kunnen de lengtes van AC en AH worden uitgedrukt in φ.

e. Druk de lengtes van AC en AH uit in φ.

Opgave 2 Het Holocaust monument in Berlijn

Het Holocaust monument, gebouwd op een stuk grond vlakbij de Reichstag en de Brandenburger Tor, heet officieel Denkmal für die ermordeten Juden Europas. Het is in 2005 geopend en kostte 14 miljoen euro. Het monument, ontworpen door de architect Peter Eisenman, beslaat ongeveer 19.000 vierkante meter, de grootte van bijna vier voetbalvelden. Het bestaat uit 2711 donkergrijze, betonnen blokken van gelijke lengte en breedte (0,95 meter bij 2,375 meter), maar variërend in hoogte (van 20 cm tot 4,5 meter). De blokken zijn in rechte lijnen geplaatst, op gelijke afstand van elkaar (0,95 meter), op een golvende bodem die naar het midden toe afloopt. De blokken worden in de volksmond 'stelae' genoemd, wat te vertalen is met 'zerken', steenachtige, naar de hemel wijzende gedenktekens voor de doden. Jaarlijks trekt het monument zo'n drie miljoen bezoekers; het is elk moment van de dag voor het publiek geopend.

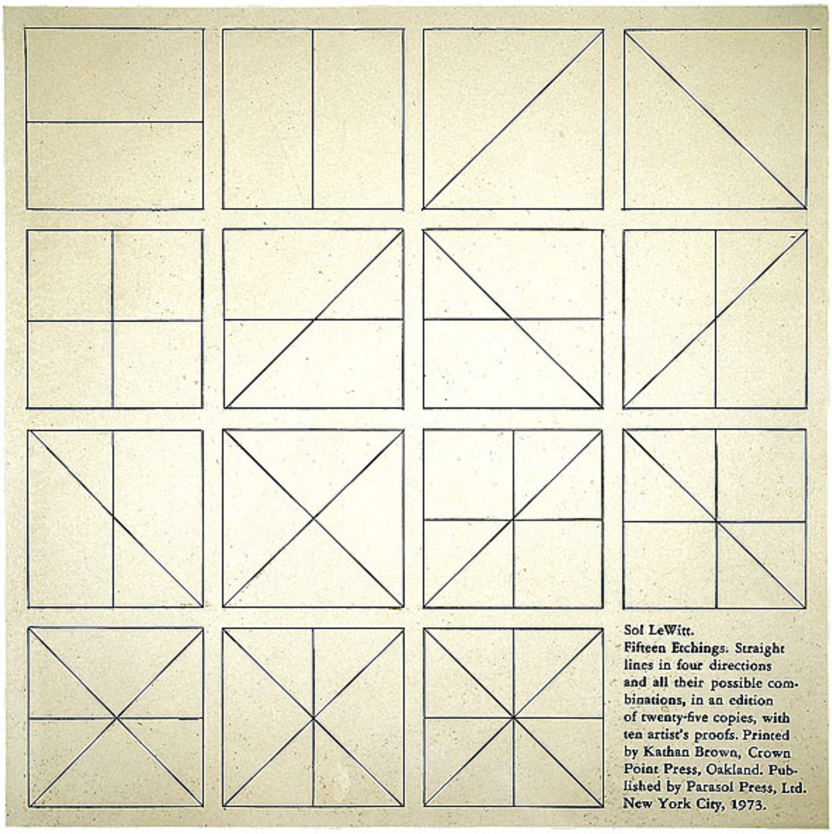
a. Schrijf de verhouding van de lengte en breedte van de blokken met zo klein mogelijke gehele getallen.
b. Laat met een berekening zien dat de gegevens over de afstand tussen twee blokken, de oppervlakte van het terrein en de afmetingen van de blokken ongeveer met elkaar kloppen. (Dat het niet helemaal klopt komt door de onregelmatigheden aan de kanten; zie de foto.)

De betonnen blokken zijn voorzien van een antigraffiti laag. Deze speciale verflaag is aan vijf kanten aangebracht: de onderkant hoeft niet behandeld te worden.

c. Er wordt beweerd dat je voor het hoogste blok bijna 9 keer zo veel verf nodig hebt dan voor het kleinste blok. Ga met een berekening na of dit klopt.

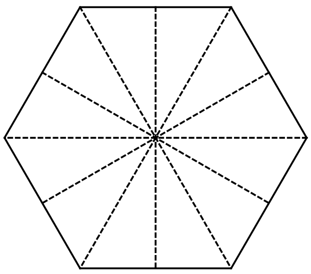
Opgave 3 Sol LeWitt

De Amerikaanse beeldhouwer/schilder Sol LeWitt maakt in zijn werk vaak gebruik van wiskundige principes. Voor zijn werk “Fifteen etchings” tekende hij binnen vierkanten alle mogelijke combinaties met minstens één diagonaal of horizontale dan wel verticale middellijn.



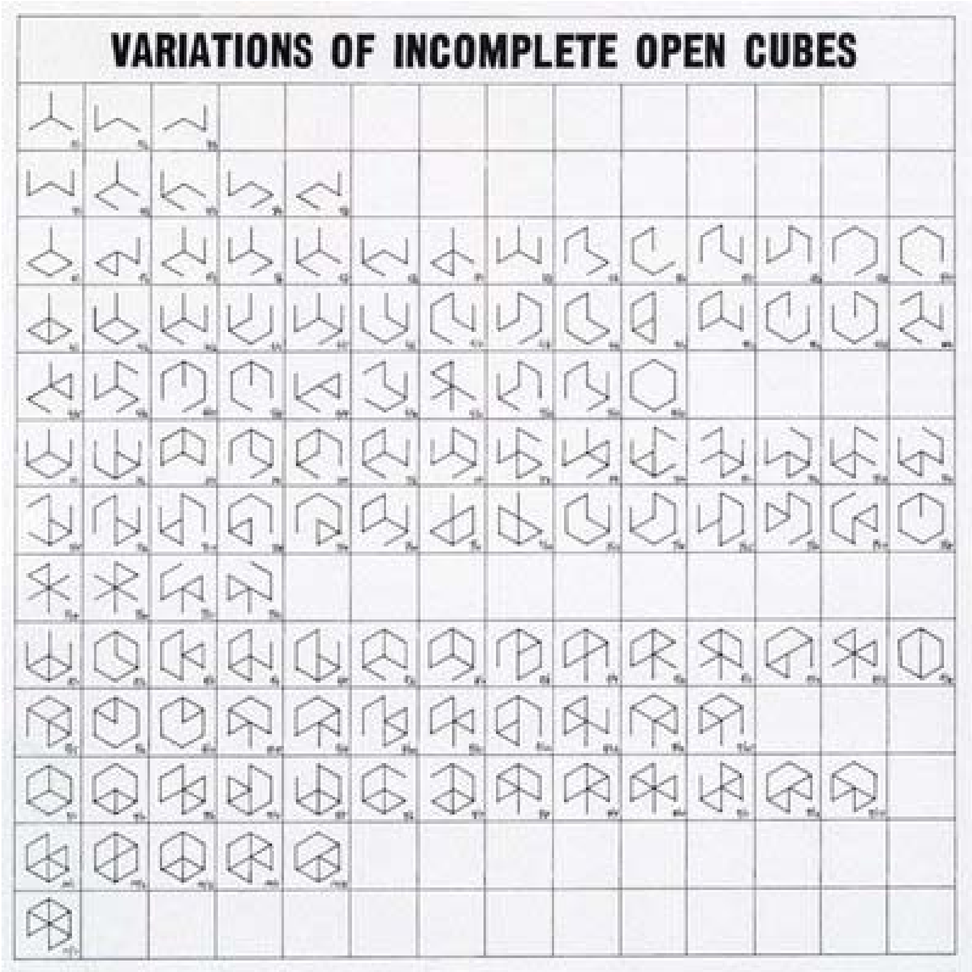
a. Laat *met behulp van een berekening of een redenering* zien dat in “Fifteen etchings” inderdaad alle mogelijkheden weergegeven zijn.

b. Stel dat Sol LeWitt uitgegaan was van regelmatige zeshoeken. De lijnen binnen de zeshoek die hij dan zou gebruiken zijn de diagonalen en de lijnstukken die de middens van de tegenover elkaar liggende zijden verbinden. Zie de figuur hiernaast. Neem aan dat Sol LeWitt besluit om *vier* van deze lijnstukken te gebruiken.



Hij tekent dus alle mogelijkheden waarbij *vier* van zulke (gestippelde) lijnstukken gebruikt worden. Hoeveel mogelijkheden zijn hiervoor?

Een ander werk waarbij Sol LeWitt uitgaat van variaties is: “Variations of incomplete open cubes”.



c. Verklaar de titel en beschrijf de opbouw van het werk.

d. Blijkbaar wilde Sol LeWitt minimaal drie ribben van de kubus gebruiken. Stel dat dit het enige uitgangspunt was voor een werk met deze titel, maar hij wel *alle* variaties wilde tonen. Hoeveel variaties met minimaal drie en maximaal elf ribben zijn er dan?

Opgave 4 Tandarts

Tandartsen gebruiken bij allerlei behandelingen verdovingen. Deze worden bij een zenuw ingespoten. De concentratie van een verdovingsmiddel bij de zenuw neemt exponentieel af. Na een uur is de concentratie met 90% afgenomen. Stel dat de tandarts 2,5 milligram (mg) in een zenuw spuit, dan geldt voor de hoeveelheid A die er na t uur nog is: $A = 2{,}5 \cdot 0{,}1^t$.

Om geen pijn te voelen gedurende een behandeling moet er altijd minstens 0,3 mg verdovingsmiddel in de zenuw zitten.

a. Hoeveel minuten kan de behandeling duren wanneer er 2,5 milligram ingespoten wordt?

In de rest van deze opgave kijken we naar het verband tussen de maximale duur van de behandeling en het aantal mg verdovingsmiddel dat een patiënt ingespoten krijgt. Hierbij houden we er rekening mee dat gedurende een behandeling er altijd minstens 0,3 mg verdovingsmiddel in de zenuw moet zitten. Het aantal mg ingespoten verdovingsmiddel noemen we V en de maximale duur van de behandeling in minuten d.

b. Toon aan dat geldt: $0{,}3 = V \cdot 0{,}962^d$

Het is voor een tandarts handig als hij de beschikking heeft over een tabel waarin het verband tussen de maximale behandelingsduur (d) en de hoeveelheid in te spuiten verdovingsmiddel (V) staat. Hieronder zie je een eerste opzet van zo'n tabel:

V (in mg)	0,5	1	2	10	?
d (in minuten)	13	…	…	?	60

c. Vul de laatste twee kolommen van de tabel verder in.

Om deze tabel verder uit te breiden, is het handig om over formules te beschikken.

d. Maak aan de hand van de vergelijking $0{,}3 = V \cdot 0{,}962^d$ een formule waarin V wordt uitgedrukt in d.

e. Maak een formule waarin d wordt uitgedrukt in V.

Opgave 5 Varkenspest

Eind januari 1997 brak in Nederland de varkenspest uit. Om verspreiding van de ziekte te voorkomen is elk bedrijf waar deze ziekte werd geconstateerd, geruimd. Dat hield in dat alle varkens van zo'n bedrijf werden afgevoerd.
Vanaf het begin hield het Ministerie van Landbouw, Natuurbeheer en Visserij wekelijks bij bij hoeveel bedrijven er tot dan toe varkenspest was geconstateerd. Dit noemen we het aantal besmette bedrijven. De eerste telling op vrijdag 7 februari 1997 (we noemen dat $n = 0$) leverde 4 besmette bedrijven op. Vier weken later waren er in totaal 37 bedrijven besmet. Dat betekent dus dat er in de periode van 7 februari – 7 maart bij 33 bedrijven varkenspest werd ontdekt.
In tabel 1 zie je enkele resultaten van die tellingen.

tabel 1

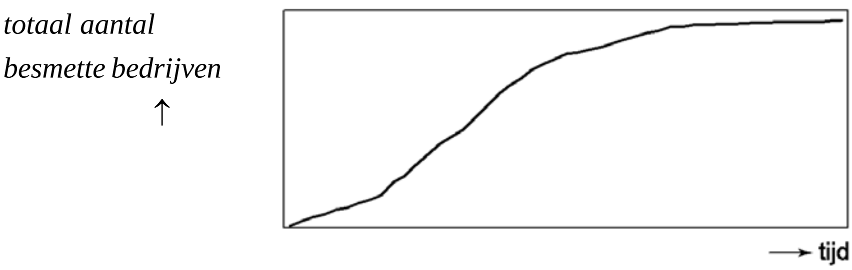
einddatum week	7 februari	7 maart	4 april	2 mei
aantal weken vanaf het begin	$n=0$	$n=4$	$n=8$	$n=12$
aantal besmette bedrijven	4	37	68	151

Je kunt narekenen dat het aantal besmette bedrijven in de periode 7 maart – 4 april relatief minder toenam dan in de periode 4 april – 2 mei.

a. Ga dit na door te berekenen met hoeveel procent het aantal besmette bedrijven toenam in elk van beide perioden.

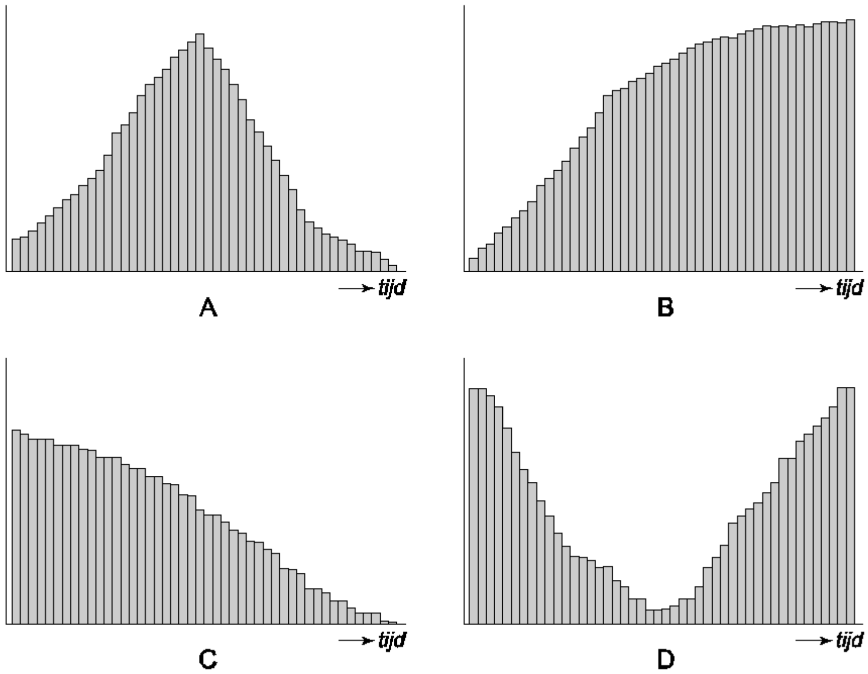
Het resultaat van deze wekelijkse tellingen zie je in figuur 1 weergegeven in de vorm van een globale grafiek. Daarbij zijn de aantallen besmette bedrijven steeds bij elkaar opgeteld.
De tijd waarop deze grafiek betrekking heeft, beslaat bijna een jaar.

figuur 1



In plaats van figuur 1 kun je ook een grafiek maken waarin staat weergegeven hoeveel besmette bedrijven er elke week bij gekomen zijn. In figuur 2 zie je vier van zulke grafieken. De wekelijkse toename van het aantal besmette bedrijven is daar met staafjes weergegeven. De grafieken in figuur 2 zijn getekend over dezelfde periode als in figuur 1.

figuur 2



Eén van deze vier grafieken past goed bij figuur 1.

b. Welke van de vier past goed bij figuur 1? Licht je antwoord toe.

In april 1997 zocht men naar een model waarmee het verdere verloop van de varkenspest voorspeld zou kunnen worden. Op basis van de aantallen besmette bedrijven voor $n = 0$, $n = 4$ en $n = 8$ kwam men tot de volgende recursieformule:

$$B_{n+1} = -0{,}012 \cdot B_n^{\,2} + 1{,}85 \cdot B_n \quad \text{met } B_0 = 4$$

In deze formule is B_n het aantal besmette bedrijven na n weken, gerekend vanaf 7 februari 1997.

Wanneer we met behulp van de GR de eerste afgeronde waarden van B_n volgens dit model berekenen en vergelijken met de werkelijke aantallen uit tabel 1, krijgen we tabel 2.

tabel 2

n	0	1	2	3	4	8
B_n	4	7	13	22	34	70
werkelijk aantal	4				37	68

Je ziet dat voor $n = 0$, $n = 4$ en $n = 8$ de waarden volgens het model redelijk goed overeenkomen met de werkelijke waarden.
Voor hogere waarden van *n* geeft het model uitkomsten die nogal afwijken van de werkelijkheid. Voor bijvoorbeeld $n = 12$ is de afwijking al heel groot.

c. Bereken hoeveel het aantal besmette bedrijven volgens dit model afwijkt van het werkelijke aantal op 2 mei 1997.

In een ander model om het verdere verloop van de varkenspest te voorspellen, gaat men er van uit dat het aantal besmette bedrijven in de eerste maanden exponentieel toeneemt.
Met behulp van de aantallen besmette bedrijven op $n = 4$ en $n = 8$ uit tabel 1 kun je een directe formule opstellen die hoort bij dit exponentiële verband.

d. Stel deze directe formule op.

Opgave 6 Krantenartikel

We analyseren het krantenartikel hiernaast, van uitgangspunten via redeneerstappen naar conclusie:

a. In het artikel is sprake van de redenering dat herrie leidt tot hoge bloeddruk. Daarvoor worden enkele redeneerstappen genoemd.
Geef aan om welke redeneerstappen het gaat.

b. Wat vind jij van de redenering?

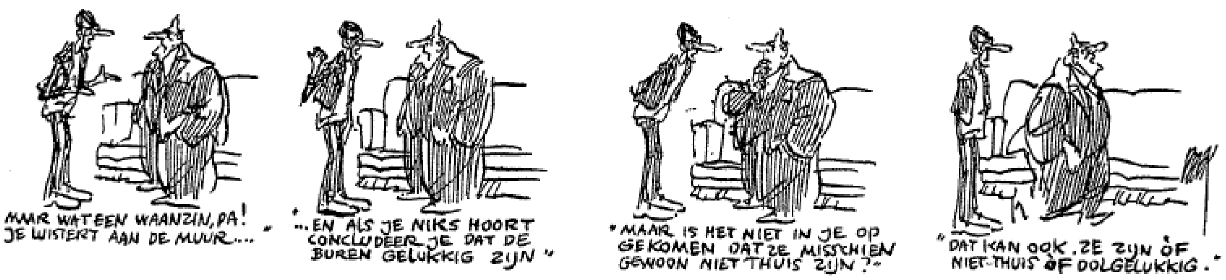
c. Waarom, denk jij, heeft de journalist het woord 'mogelijk' in de kop gezet?

Mogelijk tientallen doden door herrie

ROTTERDAM, 19 JUNI. In de regio Rijnmond overlijden jaarlijks mogelijk tientallen mensen aan de gevolgen van verkeersherrie. Dat concludeert de Milieumonitoring Stadsregio Rotterdam (MSR) vandaag in de jaarlijkse milieubarometer. Uit het rapport *Geluid, gezondheid en geld* blijkt dat één op de twaalf Rijnmonders slaapproblemen heeft door herrie. Bij ongeveer 3 procent neemt dat ernstige vormen aan. „Mensen raken daardoor gestrest en lopen een hoge bloeddruk op. Dat kan weer leiden tot een beroerte of hartinfarct", aldus een woordvoerster van de Milieudienst Rijnmond. Volgens het rapport scoort de Rotterdamse regio niet slecht in vergelijking met andere steden. (ANP)

Opgave 7 Zwart-wit denken is kleurloos

Hieronder zie je een strip van Vader en Zoon in vier plaatjes.



De zoon beschrijft in de eerste twee plaatjes een redenering van de vader.

a. Geef deze redenering van de vader. Gebruik in deze redenering 'Als …….. dan ………'

b. Na de opmerking van de zoon maakt de vader in het vierde plaatje een tegenstelling tussen "dolgelukkig" en "niet thuis". Leg uit waarom dit een drogreden genoemd wordt.

Stelling 1: Als de buren geen geluid maken, dan zijn ze gelukkig.
Stelling 2: Als de buren gelukkig zijn, dan maken ze geen geluid.

c. Leg uit dat als stelling 2 waar is, dit niet automatisch betekent dat stelling 1 ook waar is.

Opgave 8 Tien gasten, negen kamers

In het gedichtje worden tien gasten op zo'n bijzondere manier verdeeld over negen eenpersoonskamers, zo dat niemand een kamer hoeft te delen met een ander. Onderzoek waar de fout zit in deze drogredenering? (Geef een duidelijke toelichting)

Tien gasten, negen kamers

Tien vermoeide reizigers
Zochten onderkomen voor nacht en regen
Maar bij de herberg aanbeland
had de waard niet meer kamers dan negen

De waard was echter akelig slim
Hij gaf elk een eigen stee:
De eerste twee bracht hij naar kamer I
De derde leidde hij naar II

De vierde kreeg kamer III
Naar kamer IV ging nummer vijf
In V werd nummer zes gestopt
Zeven kreeg VI als nachtverblijf

De achtste sliep in VII, de negende in VIII
En terug naar I ging onze waard
Waar hij zoals gezegd
Twee reizigers had bewaard

Daarvan nam hij één, nummer tien en laatst
en bracht hem onder in kamer IX
Negen eenpersoonskamers werden zo
Is het geen wonder, opgemaakt voor tien!

Opgave 9 De paradox van de krokodil

Eén van de amusantste paradoxen uit de oudheid is die van de krokodil. Een krokodil rukt een moeder haar baby uit handen, en zegt: "Als je zult raden wat ik ga doen, krijg je je kind terug, anders eet ik het op." Radeloos roept de moeder "O, je zult hem opeten!" "Tja", zegt de krokodil, "nu kan ik hem helaas niet teruggeven, want dan zou je verkeerd geraden hebben en moet ik hem dus wel opeten." "Nee", zegt de moeder, die nu weer tot bezinning komt, "want als je mijn kind opeet, heb ik juist geraden, en moet je het dus teruggeven!"

"Kijk", zegt de krokodil, "ik begrijp dat je een beetje van slag bent, maar dit is wel zo'n beetje het stomste antwoord dat je had kunnen geven. Ik ben namelijk een man van eer, en hecht er erg aan me te allen tijde aan mijn woord te houden.

a. Leg uit waarom hier sprake is van een paradox
b. Wat denk je dat de moeder antwoordt, nu ze weet dat de krokodil een man van eer is?

Opgave 10 Roken

Een veelgemaakte redenering is de volgende:

> 90 % van de longkanker patiënten heeft gerookt.
> Dus: als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%.

Laat met een Venn-diagram zien dat deze omdraaiing niet zomaar is toegestaan.

Opgave 11 Duccio

Beeldende kunstenaars uit de tijd van de Renaissance beginnen losse eigenschappen van perspectief te ontdekken. De idee dat in de afbeelding iets gedaan moet worden met wijkende lijnen begint op te komen, maar het is nog geen samenhangend geheel.

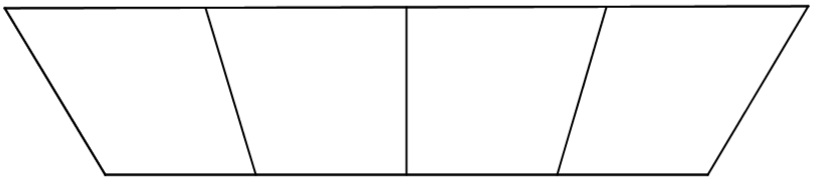
In de afbeelding hieronder is te zien dat de kunstenaar Duccio (1255-1319) pogingen doet om “diepte” in zijn schilderij weer te geven. Als we ervan uitgaan dat de persoon rechts zich in een ruimte bevindt waarin alle wanden in werkelijkheid loodrecht op elkaar staan, dan zijn er in de tekening een aantal aanwijzingen te vinden waaruit blijkt dat de kunstenaar regels voor perspectief niet consequent gebruikt.

a. Geef in de afbeelding hieronder twee voorbeelden waaruit blijkt dat de kunstenaar Duccio regels voor perspectief niet juist heeft gebruikt. Geef een toelichting bij de voorbeelden.

Een van de 75 panelen over het leven van Jezus en Maria die Duccio di Buoninsega (1255-1319) gemaakt heeft voor de kathedraal van Siena.

Ga ervan uit dat het plafond is opgebouwd uit 12 even grote vierkante vlakken. In de tekening hieronder is alleen de middelste rij vierkanten getekend. De dikte van de balken worden in de tekening als lijnen weergegeven.

b. Maak de perspectieftekening van het plafond af.



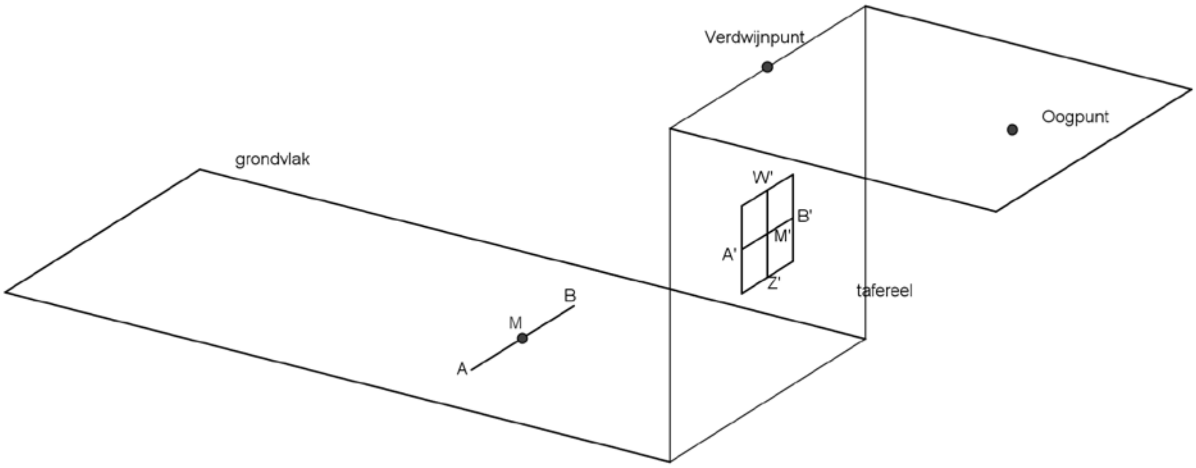
Opgave 12 Jan Dibbets

Jan Dibbets (Weert, 9 mei 1941) is een internationaal bekend beeldend kunstenaar. Hij is onder meer bekend geworden met zijn 'perspectivische correcties'. Daarin maakte hij met behulp van fotografie aanpassingen in de waarneming van simpele vormen, die hij tekende op vloeren, muren of uitzette in het gras of zand. De foto hieronder is daarvan een voorbeeld.
Dibbets plakte met tape een trapezium op een plankenvloer in een leeggeruimde kamer. Vervolgens zocht hij met de camera het gezichtspunt waar het trapezium door de perspectief gecorrigeerd werd tot een vierkant. Het lijkt niet meer dan een vermakelijke truc. Wanneer je echter de foto bekijkt, zie je een mysterieuze illusie. Het op de grond geplakte trapezium verheft zich als een vierkant en lijkt rechtop te gaan staan in de kamer.

a. Teken op de foto het verdwijnpunt en de horizon.

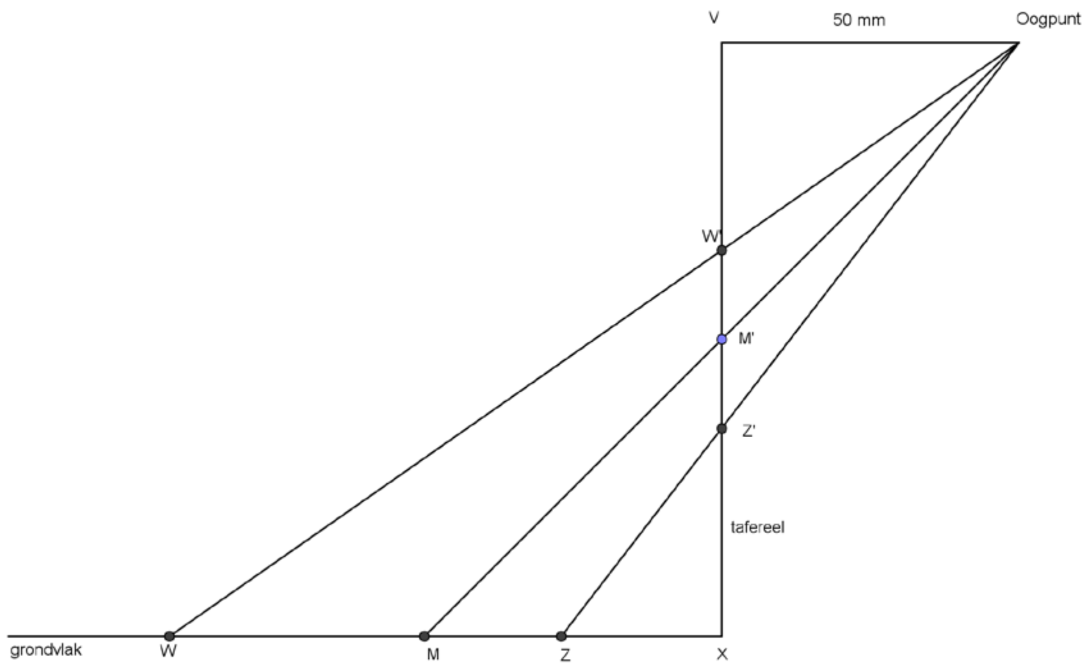
b. Op welke hoogte vanaf de grond bevond zich de lens van het fototoestel ongeveer op het moment dat de foto werd gemaakt? Geef uitleg hoe je aan je schatting bent gekomen.

In de tekening hieronder is in scheve projectie de situatie getekend. Op het tafereel zie je het vierkant van de foto. Van de middelste horizontale lijn is het origineel op de vloer getekend.



c. Teken de rest van de originele vierhoek op het grondvlak.

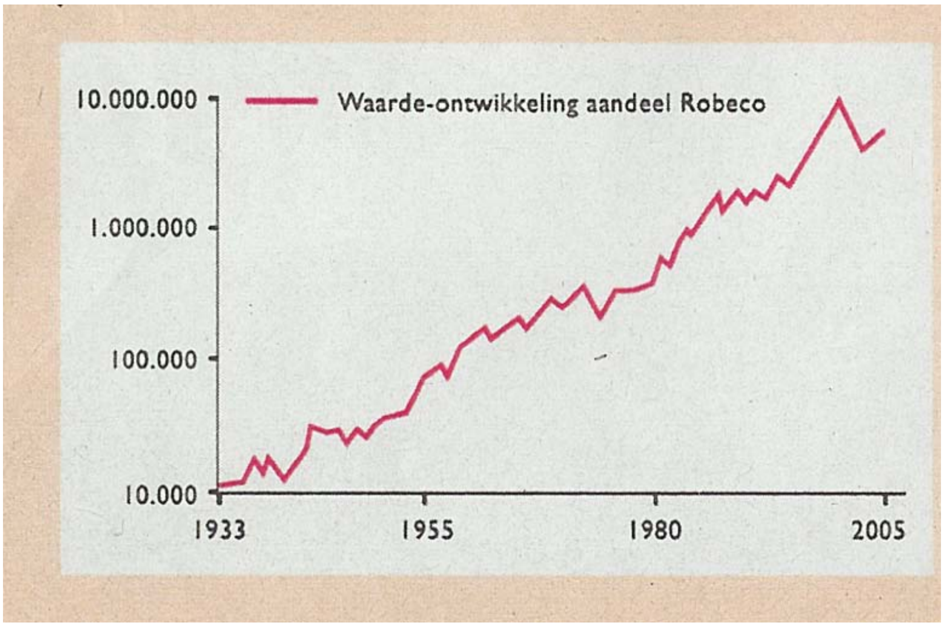
De tekening hieronder is een zijaanzicht van bovenstaande situatie. De afstand van het oogpunt tot het verdwijnpunt is 50 mm. M’ is het midden van het vierkant, zoals dat op de foto te zien is. Dit punt is precies in het midden van het tafereel getekend. De hoogte van het vierkant is op de foto gemeten 30 mm. Van het verdwijnpunt V wordt een lijn loodrecht op het grondvlak getekend. Het snijpunt van deze lijn met het grondvlak noemen we X. De afstand van het verdwijnpunt V tot het punt X is 100 mm.



d. Bereken met verhoudingen de lengte van WZ op het grondvlak.

Opgave 13 Aandeel

Hieronder zie je een grafiek uit een advertentie. Het gaat om de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933 – 2005. Je kunt in de grafiek bijvoorbeeld aflezen dat in 2000 de waarde van het aandeel Robeco gelijk was aan 10 000 000 euro.



Let op de schaalverdeling langs de verticale as.
Er geldt: in 1980 ligt de waarde tussen 100 000 en 1 000 000. Bij deze schaalverdeling kun je zo'n tussenliggende waarde vrij nauwkeurig bepalen.

a. Schrijf in maximaal 5 regels een uitleg waarin je demonstreert hoe je de waarde van het aandeel in 1980 bepaalt.

De waardeontwikkeling van het aandeel tussen 1933 en 2000 kan benaderd worden door een rechte lijn. Dit houdt in dat de waarde in deze periode (bijna) exponentieel groeide.
Neem aan dat de waarde in 2000 precies 10 000 000 was.

b. Bereken (uitgaande van de exponentiële groei) met hoeveel procent de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933 – 2000 per jaar groeide.

Bij exponentiële groei gebruikt men vaak de verdubbelingstijd.
Met het antwoord op de vorige vraag kun je ook de verdubbelingstijd berekenen.

c. Bereken de verdubbelingstijd. Had je bij de vorige vraag geen antwoord, gebruik dan 9%.

Opgave 14 Schoolreis

Een vijfde klas gaat op schoolreis naar Rome. Op de heenreis zullen enige dagen worden doorgebracht in Venetië, Florence of Siena. De deelnemende leerlingen mogen hierover stemmen. Iedere leerling heeft een eigen voorkeur, bijvoorbeeld: Venetië, Siena, Florence. Dit wil zeggen: eerste keuze Venetië, tweede keuze Siena en derde keuze Florence.
De voorkeuren van de 31 leerlingen zijn als volgt:

Voorkeur			Aantal leerlingen
Florence	Venetië	Siena	5
Florence	Siena	Venetië	7
Venetië	Florence	Siena	3
Venetië	Siena	Florence	7
Siena	Florence	Venetië	3
Siena	Venetië	Florence	6

Bij een stemming, waarbij iedere leerling maar één bestemming mag noemen, blijkt dat Florence met 12 stemmen wint en men besluit naar Florence te gaan.

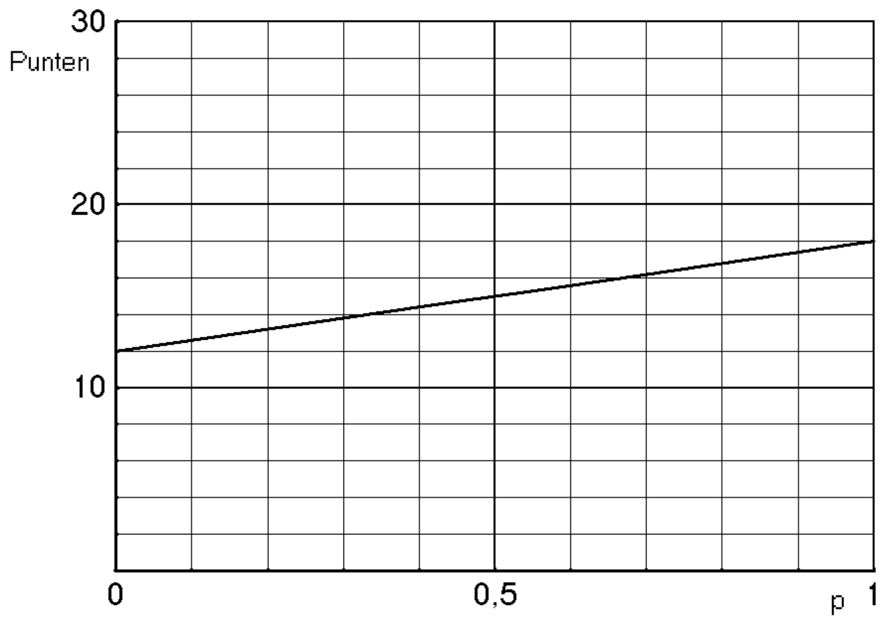
Nu zijn er ook andere kiessystemen, bijvoorbeeld de **Bordaregel**. Hierbij krijgen de verschillende voorkeuren van de leerlingen elk een verschillend aantal punten. De stad die op deze manier de meeste punten krijgt is dan de winnaar.

Neem aan dat steeds de eerste voorkeur 3 punten krijgt, de nummer twee 2 punten en de nummer drie 1 punt. We noemen dit een Bordaregel met weging 3, 2,1.
a. Bepaal volgens deze Bordaregel welke stad de winnaar is.

De Bordaregel kan ook met andere wegingen gebruikt worden. De weging 2, 1, 0 zal dezelfde winnaar opleveren als de weging 3, 2, 1. Ook de weging 1, $\frac{1}{2}$, 0 zal eenzelfde winnaar opleveren.
b. Leg dit uit.

We willen onderzoeken of er andere wegingen zijn die ervoor zorgen dat we een andere winnaar krijgen. Neem als weging 1, p, 0 (met p tussen 0 en 1).
c. Toon aan dat we een andere winnaar krijgen als p redelijk klein is.

We onderzoeken nu preciezer wat de gevolgen zijn van de keuze van p.
Voor iedere stad kun je een formule opstellen die het aantal punten dat de stad behaalt, uitdrukt in p.
Voor Florence geldt de formule $punten = 12 + 6p$.
Het verband dat deze formule beschrijft is weergegeven in de figuur hieronder.



d. Geef in de figuur hierboven ook het verband tussen p en het aantal punten weer voor de andere twee steden (Siena en Venetië) en onderzoek welke verschillende winnaars er mogelijk zijn, afhankelijk van de waarde van p.

Opgave 15 Soorten dieren

Over het aantal soorten dieren (bijvoorbeeld vissen, of reptielen) bestaan veel theorieën.
In een bepaalde theorie wordt gezegd dat op een eiland in een specifieke klimaatzone het aantal soorten reptielen alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland.
We bekijken in deze opgave het aantal soorten reptielen op een eiland in het Caraïbisch gebied. Het theoretisch verband tussen het aantal soorten reptielen S en de oppervlakte A van het eiland wordt gegeven door de volgende formule:

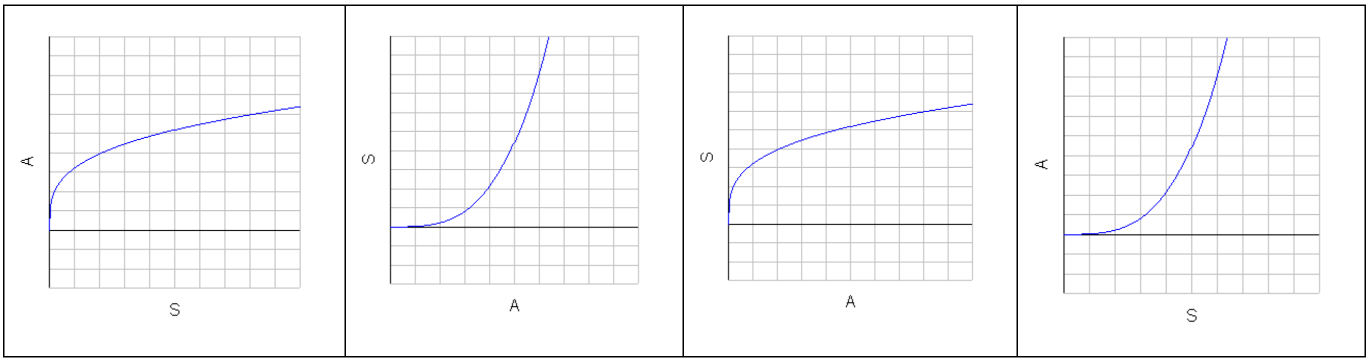
$$S = 3 \cdot A^{0,30}$$

Hierbij is A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijlen en S het aantal soorten reptielen dat op het eiland voorkomt.

Steeds als A 100 keer zo groot wordt dan zal S ook met een vast getal vermenigvuldigd worden.

a. Bereken dit vaste getal.

b. Welke van de onderstaande grafiek(en) passen bij het verband tussen A en S? Licht je antwoord toe.

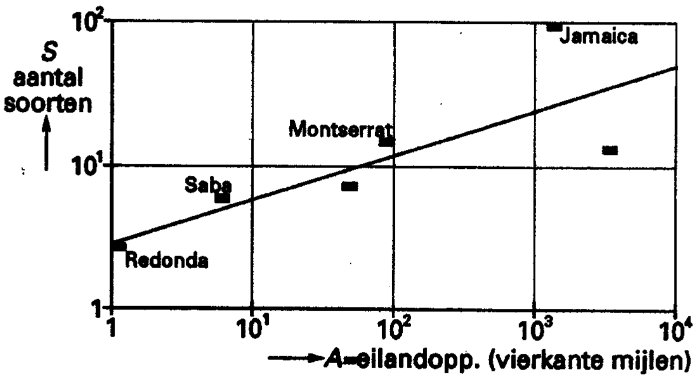


Een mijl is gelijk aan 1600 meter.

c. Bereken bij welke oppervlakte in km^2 je volgens de formule 100 soorten reptielen op het eiland mag verwachten.

De grafiek van $S = 3 \cdot A^{0,30}$ kan ook in een rooster met logaritmische schalen worden weergegeven. Zie de figuur hiernaast.

d. Bereken hoeveel soorten je op Jamaica volgens de figuur hiernaast meer zult vinden dan volgens de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$. Licht je antwoord toe.



Op een groot eiland worden verschillende soorten reptielen bedreigd met uitsterven. Men wil proberen dit te voorkomen door natuurreservaten te maken. Men heeft twee opties:

- Oprichting van één groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van twee kleinere natuurreservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen.

Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als ‘eilanden’ beschouwd worden, zodat de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt kan worden.

Voor welke van de twee opties gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten reptielen dat de twee kleinere natuurreservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het ene als in het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men kiest de optie, waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

e. Welke van de twee opties zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

Opgave 16 Veevoeder

Melkvee dat op stal staat, moet goed gevoederd worden. Koeien moeten voldoende voeding krijgen en dit voer moet van goede samenstelling en kwaliteit zijn. In de hoge eisen die aan het voer gesteld worden, gebruikt men het begrip VEM – behoefte (VEM : Voeder Eenheid Melkvee).
Met de VEM – behoefte wordt aangegeven wat een koe per dag aan voer nodig heeft om gezond te blijven. Zo heeft een koe met een lichaamsgewicht van 600 kg een VEM – behoefte van 5000.
Koeien, die melk geven, hebben extra voedingsstoffen, dus ook extra eenheden VEM nodig. Het aantal kilo's melk dat een koe per dag produceert, noemen we de melkgift. Er bestaan tabellen waarin, bij de melkgift en het vetpercentage van die melk, de bijbehorende VEM – behoefte af te lezen is.
Tabel 1 geldt voor koeien met een lichaamsgewicht van 600 kg.

tabel 1

Werkelijke melkgift (m) in kg	3,5% vet	3,75% vet	4% vet	4,25% vet
	VEM – behoefte	VEM – behoefte	VEM – behoefte	VEM – behoefte
10	9150	9300	9500	9650
15	11250	11500	11800	12050
20	13400	13750	14100	14450
25	15600	16000	16450	16900
30	17800	18350	18850	19400
35	20000	20650	21300	21950

Melk met 4% vet heet meetmelk. Bij meetmelk kan als benadering voor de VEM – behoefte van een koe van 600 kg de formule $VEM - behoefte = 5000 + 460M$ gebruikt worden (M = melkgift in kg meetmelk).

Als je de uitkomsten van deze formule vergelijkt met de bijbehorende getallen in de 4% vetkolom van de tabel, ontdek je dat de formule uitkomsten levert die wat afwijken van de bijbehorende tabelwaarden.

a. Wat is de grootste procentuele afwijking die je tegenkomt? Licht je antwoord toe.

Tabel 1 geeft niet voor alle vetpercentages de VEM – behoefte. Om die ook voor andere percentages te kunnen bepalen, rekent men de werkelijke melkgift *m* om naar de melkgift M van meetmelk. Voor het omrekenen van m naar M gebruikt men de formule $M = (0,4 + 0,15v) \cdot m$.

In deze formule is: M = melkgift in kg meetmelk;
v = vetpercentage;
m = werkelijke melkgift in kg.

b. Laat met behulp van de formule zien dat bij een vetpercentage van 4 de werkelijke melkgift gelijk is aan de melkgift in meetmelk.

Met behulp van de twee formules kunnen we nu de VEM – behoefte berekenen van een koe van 600 kg, die dagelijks 25 kg melk geeft met 5% vet.

c. Bereken die VEM – behoefte.

Een koe van 600 kg die nog geen melk geeft, heeft een VEM – behoefte van 5000. Voor iedere 50 kg lichaamsgewicht boven of beneden 600 kg moet de VEM – behoefte verhoogd, respectievelijk verlaagd worden met 300 VEM .

d. Maak een formule die de VEM – behoefte van een koe die nog geen melk geeft, uitdrukt in het gewicht G (in kg) van de koe.

De VEM – behoefte van een koe is afhankelijk van het gewicht G van de koe, haar werkelijke melkgift m en het vetpercentage v van die melk.

e. Maak een formule die de VEM – behoefte uitdrukt in G , m en v .

Uitwerkingen voorbeeldopgaven conceptsyllabus wiskunde C

Opgave 1 Parthenon

a. 88 mm breed en 54 mm hoog, verhouding $\frac{88}{54} \approx 1,6$ (kan gulden snede verhouding zijn).

b. Voor: de verhouding van de zijden voldoet (bij benadering) en dit zal bewust gedaan zijn
Tegen: de gulden snede verhouding was bij de Grieken wel bekend, maar er is geen enkele indicatie/bewijs dat deze door hen bewust in kunst/architektuur werd toegepast.

c. Teken eerst DJ zo dat BCDJ een vierkant is (bijvoorbeeld door met een passer ‘punt B om punt C heen te cirkelen’). Teken daarna FK zo dat DEFK een vierkant is. Teken tenslotte IL zo dat FGIL een vierkant is.

d. Bijvoorbeeld: CE, CD en DE met $\frac{EC}{CD} = \frac{CD}{DE}$; EG, EF en FG met $\frac{EG}{EF} = \frac{EF}{FG}$; GJ, GI en IJ met $\frac{GJ}{GI} = \frac{GI}{IJ}$

e. $GJ = \varphi 1 + DE =$, $EG = 1\varphi + (2\varphi = \varphi) \; ^2BC =$; $EC = 2\varphi + (3\varphi = \varphi^2) + \; ^3AH =$;
$AC = 3\varphi + (5\varphi = \varphi^3) + \; ^4$

Opgave 2 Het Holocaust monument in Berlijn

a. $\frac{0,95}{2,375} = \frac{2}{5}$

b. Breedte: $2,375 + 0,95 = 3,325$ meter, dus 30 blokken in 100 meter
Lengte: $0,95 + 0,95 = 1,90$ meter, dus 100 blokken in 190 meter
Dan is de oppervlakte inderdaad ongeveer 19 000 m^2 (en zijn er ongeveer 3000 blokken).

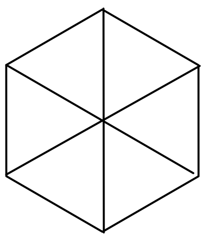
c. Kleinste blok: 2,375 bij 0,95 bij 0,20 geeft 3,6 m^2 verf
Grootste blok: 2,375 bij 0,95 bij 4,5 geeft 32,2 m^2 verf
$\frac{32,2}{3,6} \approx 9$ dus het klopt.

Opgave 3 Sol LeWitt

a. $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15$

b. $\binom{6}{4} = 15$

c. Onder een bepaalde hoek gezien geeft een perspectivisch aanzicht van een draadkubus een zeshoek te zien (zie afbeelding hiernaast). De plaatjes van LeWitt geven allen incomplete versies van deze zeshoek te zien.
Opbouw: het aanzicht van een volledige draadkubus heeft 12 lijnstukjes.
LeWitt heeft zijn variaties geordend op aantal lijnstukjes, van boven (3) naar beneden(11).



d. $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \ldots + \binom{12}{11} = 4016$

Opgave 4 Tandarts

a. $2,5 \cdot 0,1^t = 0,3$ geeft $t \approx 0,92$ uur ofwel 55 minuten.

b. $0,3 = V \cdot 0,1^t = V \cdot 0,1^{\frac{1}{60}d} = V \cdot (0,1^{\frac{1}{60}})^d \approx V \cdot 0,962^d$

c. $0,3 = 10 \cdot 0,962^d$ geeft $d \approx 90$ en $0,3 = V \cdot 0,962^{60}$ geeft $V \approx 3$.

d. $0,3 = V \cdot 0,962^{d}$

$$V = \frac{0,3}{0,962^{d}} = 0,3 \cdot 0,962^{-d} \quad (\approx 0,3 \cdot 1,04^{d})$$

e. $0,962^{d} = \dfrac{0,3}{V}$

$$d = \frac{\log\left(\frac{0,3}{V}\right)}{\log 0,962} \quad \left(= \frac{\log 0,3 - \log V}{\log 0,962} \approx \frac{-0,523 - \log V}{-0,017} = \frac{0,523 + \log V}{0,017} = \ldots\right)$$

Opgave 5 Varkenspest

a. 7 maart - 4 april: +84% en 4 april - 2 mei: +122% (dus in de eerste periode relatief minder toename).

b. De toename verloopt eerst langzaam, dan sneller, dan weer langzamer; grafiek A.

c. De formule geeft voor $n = 12$ de waarde 71, de afwijking (t.o.v. 151) is dan 80.

d. $B_n = b \cdot g^{n}$ met $g = \left(\dfrac{68}{37}\right)^{0,25} \approx 1,164$ en $b \approx \dfrac{37}{(1,164)^{4}} \approx 20$, dus $B_n = 20 \cdot 1,164^{n}$.

Opgave 6 Krantenartikel

a. Herrie → slaapproblemen → stress → hoge bloeddruk

b. Omdat het lang niet altijd zo is: bij ongeveer 3 procent van de Rijnmonders met slaapproblemen ontstaat hoge bloeddruk, en dat kan leiden tot een beroerte of hartinfarct, en dat kan dan weer dodelijk zijn… Uitgaande van alle Rijnmonders (waarvan 1 op de 12 slaapproblemen door herrie heeft) weet je niet hoeveel doden dit op kan leveren.

Opgave 7 Zwart-wit denken is kleurloos

a. ‘Als je niks hoort, dan zijn de buren gelukkig.’

b. ‘dolgelukkig’ en ‘niet thuis’ sluiten elkaar niet uit (de buren kunnen best tegelijkertijd dolgelukkig en niet thuis zijn).

c. Een uitleg als: “De ontkenning van stelling 1 luidt: ‘als de buren niet gelukkig zijn, dan maken ze niet geen geluid’. Ofwel: ‘als de buren niet gelukkig zijn, dan maken ze geluid’. Dit is niet gelijkwaardig met stelling 2.”

Opgave 8 Tien gasten, negen kamers

Reiziger nummer 10 is dezelfde als één van de reizigers 1 en 2, die aanvankelijk in de eerste kamer werden ondergebracht.

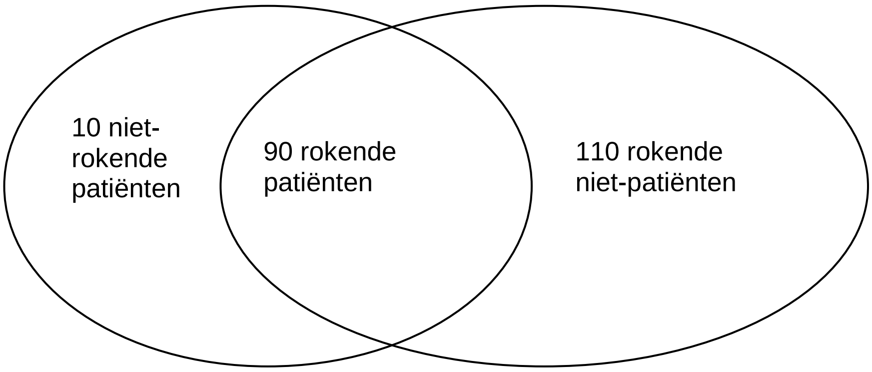
Opgave 9 De paradox van de krokodil

a. Als de reactie van de moeder het antwoord is, moet de krokodil het kind opeten en dan moet de krokodil het kind teruggeven (immers, hij houdt zich aan zijn woord).

b. De paradox zit in het feit dat beide acties (opeten en teruggeven) niet tegelijk kunnen voorkomen en daarmee een patstelling is ontstaan.

Opgave 10 Roken

Beschouw patiënten en rokers als aparte groepen met een doorsnede ‘rokende patiënten’.
Een mogelijke situatie is de volgende:

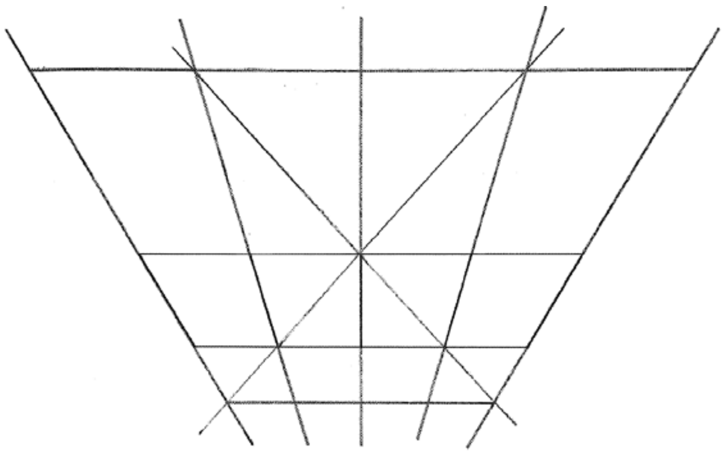


Nu heeft inderdaad 90% van de patiënten gerookt (namelijk 10 van de 100), maar van de rokers is zeker geen 90% patiënt (namelijk 90 van de 200).

Opgave 11 Duccio

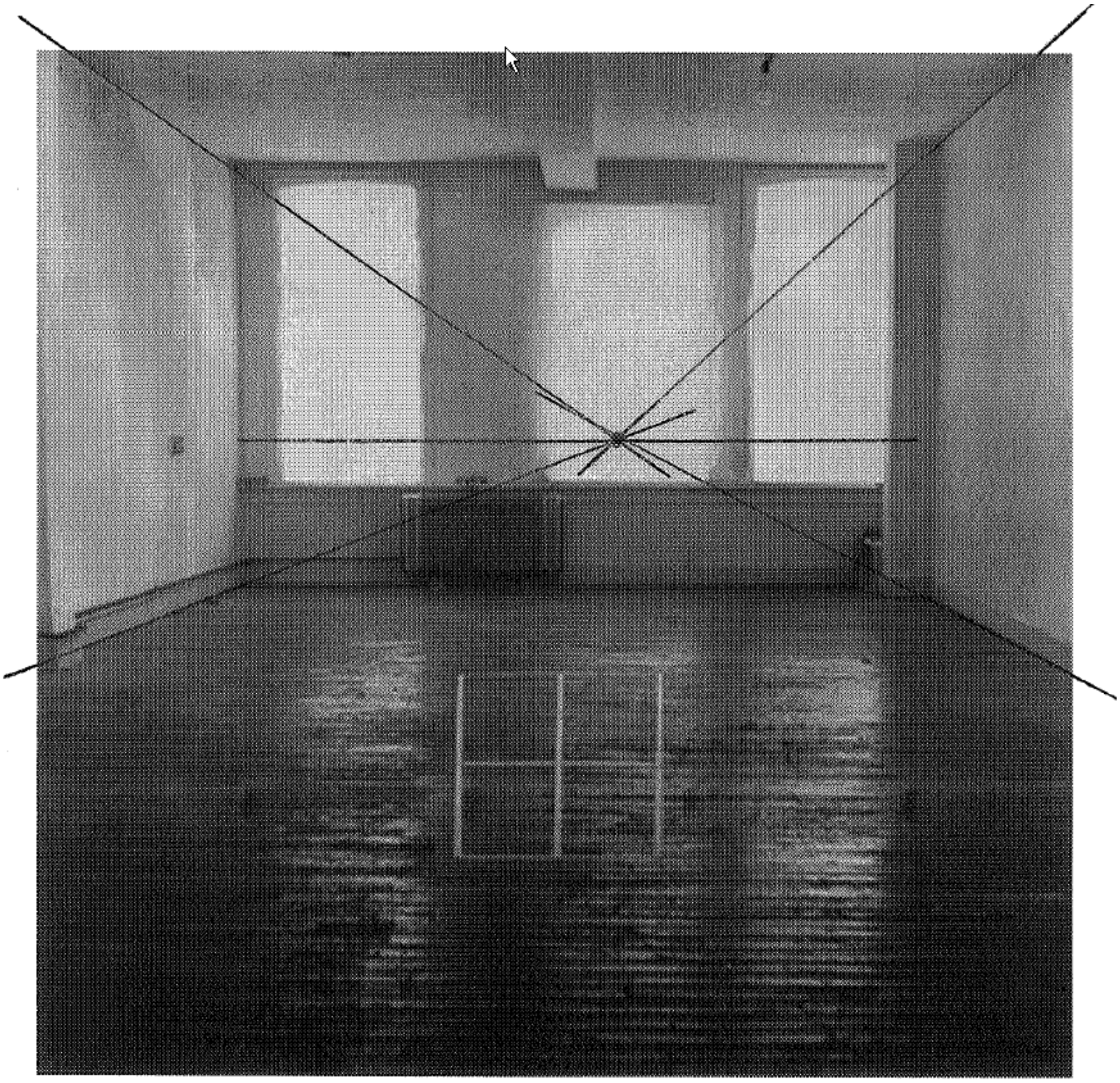
a. De plafondbalken en het deksel van de kist waar de persoon rechts op zit hebben niet allebei hetzelfde verdwijnpunt (het ene ligt 'naar achteren' en het andere 'naar voren').
De lessenaar waarop het boek ligt (en ook het boek zelf) kent twee maal twee evenwijdige zijden, en is dus feitelijk niet in perspectief (zonder verdwijnpunt) getekend.

b.



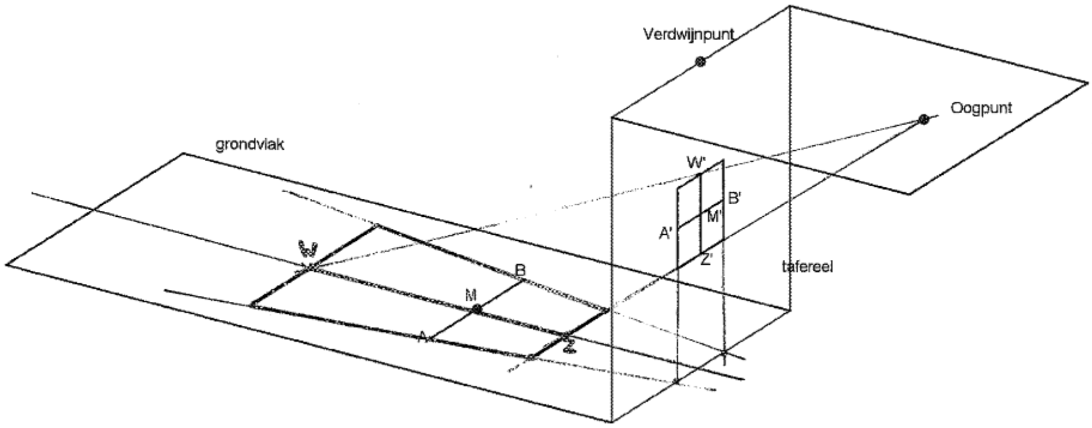
Opgave 12 Jan Dibbets

a.



b. Het verdwijnpunt zit in de tekening ongeveer 2,1 cm boven de vloer (gemeten op de wand met de ramen). De vensterbank zit in de tekening op ongeveer 1,4 cm hoogte, dat komt in werkelijkheid overeen met (naar schatting) 80 cm. Dan bevond de lens zich op (ongeveer) $\frac{2,1}{1,4} \cdot 80 = 120$ cm boven de grond.

c.



d. Er geldt: $W'Z' = 30$ en $VW' = XZ' = \dfrac{100-30}{2} = 35$

Dan: $\dfrac{XZ}{XZ'} = \dfrac{VO}{VZ'}$ geeft $\dfrac{XZ}{35} = \dfrac{50}{65}$ dus $XZ = \dfrac{50 \cdot 35}{65} \approx 27$

Verder: $\dfrac{XW}{XW'} = \dfrac{VO}{VW'}$ geeft $\dfrac{XW}{65} = \dfrac{50}{35}$ dus $XW = \dfrac{50 \cdot 65}{35} \approx 93$

Dus $WZ = XW - XZ \approx 66$ cm.

Opgave 13 Aandeel

a. Bijvoorbeeld als volgt:
Teken een verticaal lijnstuk vanaf de horizontale as bij 1980 omhoog naar de grafiek. Teken het snijpunt, en teken vanaf dit snijpunt een horizontaal lijnstuk richting de verticale as. Geef het snijpunt aan, en meet de hoogte van dit snijpunt langs de verticale as vanaf de aangegeven waarde 10 000 (= 10^4). Dit is (ongeveer) 31 mm. De stapgroote op de verticale as is 17,5 mm.

Dan hoort bij 31 mm de waarde $10^{\frac{31}{17,5}+4} \approx 590\,000$ euro.

b. In 67 jaar is de groeifactor $\dfrac{10\,000\,000}{10\,000} = 1000$, dus de groeifactor per jaar is $g = 1000^{\frac{1}{67}} \approx 1,109$.

Dat is een groei van (ongeveer) 11% per jaar.

c. $1,109^T = 2$ geeft $T \approx 6,7$ jaar ($g = 1,09$ geeft een verdubbelingstijd van ongeveer 8 jaar).

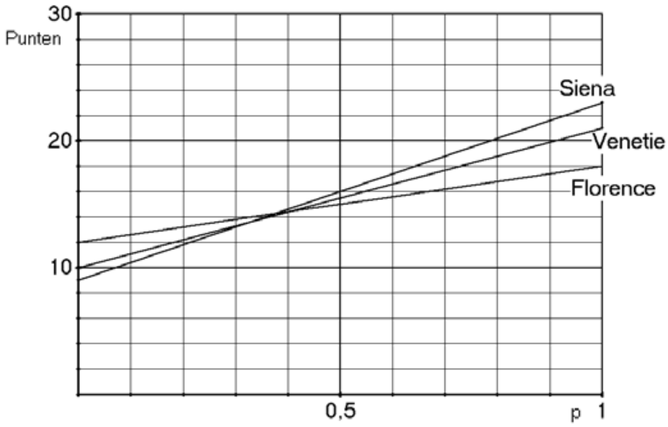
Opgave 14 Schoolreis

a. Florence: $12 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = 61$ punten
Venetië: $10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 62$ punten
Siena: $9 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 63$ punten en de winnaar

b. Als de eerste, de tweede en de derde voorkeur elk met één punt zakt, zullen de totaalscores alledrie evenveel zakken en de volgorde dus gelijk blijven. Als de eerste, de tweede en de derde voorkeur elk in punten halveren, zullen ook de totaalscores halveren en dus zal dan de volgorde gelijk blijven.
(NB: alles narekenen met de nieuwe weging is omslachtig maar wel acceptabel).

c. Dan heeft Florence $12 + 6p$ punten, Venetië $10 + 11p$ punten en Siena $9 + 14p$ punten. Bij kleine waarden van p zal het deel met de p relatief minder zwaar wegen, en de 12 zwaarder.
Bijvoorbeeld: narekenen met $p = 0,1$ geeft Florence als winnaar.

d. (Florence: lijn door de punten (0, 12) en (1, 18); Venetië: lijn door de punten (0, 10) en (1, 21); Siena: lijn door de punten (0, 9) en (1, 23))



Alleen de lijnen van Florence en Siena snijden. Berekenen van het snijpunt geeft: Florence wint als $p < 0,375$, Siena als $p > 0,375$ (aflezen geeft een *p*-waarde tussen 0,35 en 0,4), Venetië kan nooit winnaar worden!

Opgave 15 Soorten dieren

a. $100^{0,30} \approx 4$

b. De grafieken van figuur 3 (plot de gegeven formule op de GR) en figuur 4 (de omgekeerde van figuur 3, door spiegeling in de lijn $S = A$ in te zien) passen beide.

c. $S = 100$ geeft $A \approx 119\,196$ vierkante mijlen, dat is ongeveer 300 000 km^2.

d. Aflezen in de figuur geeft voor Jamaica $S \approx 100$ en $A = 10^{3+\frac{0,25}{1,85}} \approx 1365$ vierkante mijlen. De formule geeft dan $S = 3 \cdot A^{0,30} \approx 26$ dus 26 soorten. De figuur geeft er 74 meer.

e. Optie 1: $A = 400$ geeft $S \approx 18$ dus 18 soorten;
Optie 2: $A = 200$ geeft $S \approx 15$ dus $15 + 15 - 8 = 22$ soorten; men zal optie 2 kiezen.

Opgave 16 Veevoeder

a. De grootste procentuele afwijking is 1,05:

m	formule	% afwijking
10	9600	1,05
15	11900	0,85
20	14200	0,71
25	16500	0,30
30	18800	–0,27
35	21100	–0,95

b. $v = 4$ invullen in de gegeven formule geeft $M = (0,4 + 0,15 \cdot 4) \cdot m$ en omdat $0,4 + 0,15 \cdot 4 = 1$ volgt dan $M = 1 \cdot m = m$.

c. $v = 5$ en $m = 25$ geeft $M = 28,75$. Dan is $VEM - behoefte = 5000 + 460 \cdot 28,75 = 18\,225$.

d. Als $G = 600$ is $VEM = 5000$ en als $G = 650$ is $VEM = 5300$. Lineair verband, dan volgt $VEM = 6G + 1400$.

e. Combineer de informatie uit de stamtekst van vraag a met de formule uit vraag d:
$VEM = 6G + 1400 + 460M$. Dan volgt, met behulp van de formule uit de stamtekst van vraag b:
$VEM = 6G + 1400 + 460(0,4 + 0,15v) \cdot m$.
Dit kun je nog verder uitwerken tot $VEM = 6G + 1400 + 184m + 69vm$.

Bijlage 1

Examenprogramma voor wiskunde C vwo

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma Wiskunde C voor vwo omvat 480 slu en bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A	Vaardigheden
Domein B	Algebra en tellen
Domein C	Verbanden
Domein D	Verandering
Domein E	Statistiek en kansrekening
Domein F	Logisch redeneren
Domein G	Vorm en ruimte
Domein H	Keuzeonderwerpen

Het centraal examen.
Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen A, B, C, D, F en G.
Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.
Het CvE maakt indien nodig een specificatie van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen.
Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en
- domeinen E en H;
- het domein H, met dien verstande dat deze onderwerpen per kandidaat kunnen verschillen;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

2 De kandidaat herkent de betekenis van wiskunde in maatschappij, cultuur en geschiedenis en kan deze in concrete situaties beschrijven.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

3 De kandidaat beheerst de bij het eindexamenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.

Domein B: Algebra en tellen

Subdomein B1: Rekenen en algebra

4 De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen en kan daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen.

Subdomein B2: Telproblemen

5 De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij

berekeningen en redeneringen.

Domein C: Verbanden

6 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de verschillende representaties doelgericht gebruiken, kan bijbehorende vergelijkingen oplossen, waar nodig met behulp van ICT, en kan periodieke verschijnselen beschrijven.

Domein D: Veranderingen

7 De kandidaat kan het veranderingsgedrag van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en de regelmaat in rijen doelgericht beschrijven en gebruiken.

Domein E: Statistiek en kansrekening

Subdomein E1: Probleemstelling en onderzoeksontwerp

8 De kandidaat kan bij een probleemstelling die zich leent voor een statistische aanpak een plan maken om antwoord op de probleemstelling te verkrijgen, waarbij geschikte variabelen worden gekozen.

Subdomein E2: Visualisatie van data

9 De kandidaat kan verkregen data verwerken in een geschikte tabel of grafiek en deze op waarde interpreteren.

Subdomein E3: Kwantificering

10 De kandidaat kan de verkregen data samenvatten in voor de probleemstelling geschikte maten en hieraan interpretaties verbinden.

Subdomein E4: Kansbegrip

11 De kandidaat kan het kansbegrip gebruiken om bij een toevalsproces de kans op een bepaalde uitkomst of gebeurtenis te bepalen aan de hand van een diagram, combinatoriek, kansregels en simulatie.

Subdomein E5: Kansverdelingen

12 De kandidaat kan aangeven in welke situatie een toevalsvariabele een bepaalde kansverdeling bezit en van die verdeling de karakteristieken verwachtingswaarde en standaardafwijking hanteren.

Domein F: Logisch redeneren

13 De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.

Domein G: Vorm en ruimte

14 De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en conclusies trekken over vorm en oppervlakte van zo'n object.

Domein H: Keuzeonderwerpen (40 slu)

Bijlage 2

Voorbeeldexamenopgaven

De voorbeeldexamenopgaven worden in januari 2011 gepubliceerd op cve.nl.