College voor Examens

Werkversie
syllabus wiskunde B havo 2011
bij het conceptexamenprogramma
van cTWO

Oktober 2010

Colofonpagina:

Syllabuscommissie wiskunde B, in opdracht van het College voor Examens

Henk van der Vorst (Universiteit Utrecht), voorzitter
Jenneke Krüger (SLO), secretaris
Jos Remijn (Cito), toetsdeskundige
Peter Kop (CvE), vaksectie wiskunde A/C
Frank van den Heuvel (NVvW), docent
Alma Taal-Muskee, docent, lid werkgroep (cTWO) voor examenprogramma wiskunde B
Kees Rijke, (voormalig) docent
Peter van Wijk (cTWO), opvolger van Sieb Kemme (cTWO)

Voorwoord

In het kader van de vernieuwing van het onderwijs in de bètavakken in havo en vwo heeft het ministerie van OCW aan cTWO, de vernieuwingscommissie voor wiskunde, onder meer gevraagd een advies uit te brengen over beproefde examenprogramma's. CTWO heeft daartoe experimentele examenprogramma's opgesteld, die met ingang van het schooljaar 2009/2010 in een pilot op een aantal scholen uitgevoerd worden. Het betreft concept examenprogramma's die niet voor 2014 landelijk worden ingevoerd.

Ter ondersteuning van de voorbereiding op het centraal examen van deze pilot heeft het College voor Examens (CvE) drie syllabuscommissies ingesteld die de opdracht kregen voor elk examenprogramma een specificatie van de in het centraal examen te toetsen domeinen en subdomeinen te formuleren. De syllabi geven in detail aan wat gekend en gekund moet worden en als zodanig in het CE getoetst kan worden. Een syllabus geeft geen aanwijzingen ten aanzien van welke stof op welke manier onderwezen moet worden.

Deze syllabus heeft nog geen definitieve status. Hij dient de scholen die aan de examenexperimenten deelnemen voldoende houvast te bieden bij de pilot waar zij aan deelnemen. Om die reden draagt de syllabus de toevoeging *Werkversie*. De werkversies van de syllabi wiskunde zijn de basis voor de pilot waarin de haalbaarheid, onderwijsbaarheid en toetsbaarheid van de nieuwe examenprogramma's worden onderzocht.

De werkversies van de syllabi wiskunde zijn ook nog niet compleet. Zo ontbreken de voorbeelden van toetsvragen nog, waarmee het karakter van de CE-bevraging bij de nieuwe examenprogramma's wordt geïllustreerd. Op dit terrein moet nog werk worden verzet. Het ligt in de bedoeling deze onderdelen in oktober 2010 (havo) en januari 2011 (vwo) aan de werkversies van de syllabi toe te voegen.

Ruth Welman
Plv. clustermanager College voor Examens

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Deze werkversie syllabus geeft informatie ten behoeve van de voorbereiding op het centraal examen wiskunde B havo, met name nadere specificatie van de globale eindtermen van dat deel van het experimentele examenprogramma dat centraal getoetst wordt.
De specificaties voor wiskunde B havo in deze werkversie syllabus zijn opgesteld door de syllabuscommissie wiskunde B. Bij deze specificaties zijn voorbeeldopgaven opgenomen ter verduidelijking. Dit zijn geen voorbeeldexamenopgaven, ze zijn ook niet bedoeld als toetsopgaven voor leerlingen.
De syllabuscommissie heeft bij het opstellen van deze specificatie de uitgangspunten van cTWO en de uitvoerbaarheid van het programma als leidraad genomen. Afstemming met de syllabuscommissies voor wiskunde A en C heeft waar mogelijk plaatsgevonden, in sommige gevallen bleek dat echter niet wenselijk. Zo zijn de specificaties bij wiskunde B wat anders gestructureerd dan bij wiskunde A en C, dit hangt samen met het hogere abstractieniveau dat bij wiskunde B verwacht wordt.

De vernieuwingscommissie cTWO heeft de volgende uitgangspunten geformuleerd voor het examenprogramma wiskunde B havo.
- De *doelgroep* van wiskunde B havo wordt gevormd door leerlingen die het profiel NT volgen en leerlingen in de profielen EM en NG die wiskunde B kiezen in plaats van wiskunde A.
- Het vak bereidt voor op *vervolgopleidingen* met een sterk kwantitatieve en exacte component, zoals de technische sector van het hbo. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden, formulevaardigheden en de inzichtelijke toepassingen daarvan.
- Wiskunde B is een sterk en wiskundig *samenhangend programma* dat past in het NT-profiel. Door ruimte te creëren voor toepassingen en contexten uit bètavakken, onder meer natuurkunde, wordt daarnaast samenhang met andere exacte vakken gerealiseerd.
- In wiskunde B komt een aantal wiskundige *kernconcepten* aan de orde en wordt aandacht besteed aan begripsvorming en aan redeneren. Een smal en diep programma verdient dan ook de voorkeur boven een breed en oppervlakkig curriculum.
- De *samenhang met andere exacte vakken*, zoals wiskunde D, NLT, natuurkunde, scheikunde en biologie, is een punt van aandacht. Het modelleren van natuurwetenschappelijke verschijnselen speelt hierbij een grote rol. Het rapport van de werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde (zie www.ctwo.nl) bevat voor wat betreft de samenhang met natuurkunde een aantal concrete voorstellen.

In deze syllabus treft u aan
- nadere informatie over het centraal examen (hoofdstuk 2);
- de specificaties van globale eindtermen die in het centraal examen getoetst dienen te worden, met voorbeeldopgaven waar de commissie dat wenselijk acht (hoofdstuk 3);
- een hoofdstuk over algebraïsche vaardigheden, met voorbeelden (hoofdstuk 4);
- het experimentele examenprogramma voor wiskunde B havo (bijlage 1);
- voorbeeld examenopgaven dan wel een voorbeeldexamen, met correctievoorschrift (bijlage 2) **PM**.

2. Het centraal examen en het schoolexamen

2.1 Verdeling van de examenstof

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C en D in combinatie met de vaardigheden uit domein A.
Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft tenminste betrekking op domein A en
- domein D;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

In schema:

Domein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	X	X	
B Functies, grafieken en vergelijkingen	X		X
C Meetkundige berekeningen	X		X
D Toegepaste analyse 1	X	X	

Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in bijlage 1.
Van de (sub)domeinen die in het centraal examen worden getoetst staat een gedetailleerdere beschrijving in hoofdstuk 3.

2.2 Hulpmiddelen

Bij het centraal schriftelijk eindexamen mogen de kandidaten gebruik maken van een grafische rekenmachine. Door het CvE wordt jaarlijks een lijst van toegestane grafische rekenmachines gepubliceerd.
Bij het centraal examen wiskunde B worden geen formules beschikbaar gesteld.

2.3 Vakspecifieke regels correctievoorschrift

significantie
Er wordt van de kandidaten niet verlangd dat zij kennis hebben van de regels voor het aantal significante cijfers. Daarom wordt bij de vragen van het centraal examen aangegeven in welke nauwkeurigheid het antwoord dient te worden gegeven of er wordt genoegen genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

basiskennis
Het examenprogramma bouwt voort op de veronderstelde basiskennis van de onderbouw havo.

ICT
In het centraal examen wordt met ICT de grafische rekenmachine bedoeld.

3. Specificaties van de globale eindtermen voor het CE

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden
De eindterm in dit subdomein heeft betrekking op vaardigheden die van belang zijn voor alle examenvakken, de wiskunde in het bijzonder.

1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan
1.1 doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken;
1.2 adequaat schriftelijk rapporteren over onderwerpen uit de wiskunde.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden
De eindterm in dit subdomein heeft betrekking op vaardigheden die van belang zijn voor de profielvakken waarin de kandidaat examen doet, de wiskunde in het bijzonder.

2 De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

De kandidaat kan
2.1 een probleemsituatie in een wiskundige, natuurwetenschappelijke of maatschappelijke context analyseren, gebruik makend van relevante begrippen en theorie vertalen in een vakspecifiek onderzoek, dat onderzoek uitvoeren, en uit de onderzoeksresultaten conclusies trekken;
2.2 een realistisch probleem in een context analyseren, inperken tot een hanteerbaar probleem, vertalen naar een wiskundig model, modeluitkomsten genereren en interpreteren en het model toetsen en beoordelen;
2.3 met gegevens van wiskundige en natuurwetenschappelijke aard consistente redeneringen opzetten.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden
De eindterm in dit subdomein heeft betrekking op vaardigheden die specifiek van belang zijn voor het programma wiskunde havo B

3 De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.

De kandidaat
3.1 beheerst de regels van de rekenkunde en algebra zonder ICT;
3.2 heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren;
3.3 kan wiskundige begrippen in vakspecifieke taal en terminologie interpreteren en produceren, inclusief formuletaal, conventies en notaties;
3.4 kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen;.
3.5 kan de correctheid van redeneringen verifiëren;

3.6 kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op wiskundige juistheid.

Domein B: Functies, grafieken en vergelijkingen (120 slu)

Subdomein B1: Standaardfuncties

4. De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen en werken met eenvoudige transformaties.

De kandidaat kent:

- de begrippen die karakteristieke eigenschappen van de grafieken van functies beschrijven: domein, bereik, stijgen, dalen, toenemend en afnemend stijgend en dalend, top, extremen, minimum, maximum, snijpunt met de *x*-as, snijpunt met de *y*-as symmetrie en asymptotisch gedrag;
- karakteristieke eigenschappen en grafieken van machtsfuncties met rationale exponenten **(** $f(x) = x^p$ **);**
- karakteristieke eigenschappen en grafieken van exponentiële functies ($f(x) = a^x$) en van logaritmische functies ($f(x) = {}^a\log x$) en in verband hiermee de begrippen grondtal en exponent;
- karakteristieke eigenschappen en grafieken van de goniometrische functies $f(x) = \sin x$ en $f(x) = \cos x$ en in verband hiermee de volgende extra begrippen: radiaal, periode, amplitude, evenwichtsstand en frequentie;
- de begrippen transformatie, lijnvermenigvuldiging en translatie;
- de begrippen lineaire functie, rechte lijn, kwadratische functie, parabool, derde- en hogere machtsfunctie en wortelfunctie ;
- de begrippen gebroken functie, als $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+b}$,en hyperbool;
- het begrip inverse functie van machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies;
- de begrippen som- en verschilfunctie als som of verschil van twee functies;
- het begrip samengestelde functie als combinatie van standaardfuncties;
- de rekenregels voor machten en logaritmen (zie hoofdstuk Algebraïsche vaardigheden).

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):

4.1 van elk van bovengenoemde standaardfuncties de grafiek tekenen zonder hulp van de GR en daarbij gebruik maken van kar akteristieke eigenschappen van de betreffende functie en haar grafiek;
4.2 verschillende schrijfwijzen voor formules van tweedegraads functies hanteren en interpreteren;
4.3 bij een grafiek van een eenvoudige functie, waarbij gegeven is om welk type functie het gaat, het functievoorschrift opstellen;
4.4 de grafiek van een functie beschrijven door middel van de karakteristieke eigenschappen;
4.5 karakteristieke eigenschappen van bovengenoemde functies en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen;
4.6 een exponentieel verband beschrijven met behulp van de termen beginwaarde en groeifactor;
4.7 een exponentieel verband schrijven als een logaritmisch verband en omgekeerd en bij machtsfuncties x schrijven als functie van y (op domein $\mathbb{R}^+$);
4.8 de grafiek van een functie vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as of y-as;
de grafiek van een functie transleren;

4.9 het functievoorschrift opstellen dat hoort bij de nieuwe grafiek die is ontstaan na transformatie van de gegeven grafiek.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
4.10 van een combinatie van standaardfuncties het domein, bereik, minimum, maximum, snijpunt met de *x*-as, snijpunt met de *y*-as, symmetrie en asymptotisch gedrag bepalen;
4.11 een combinatie van een lijnvermenigvuldiging en een translatie toepassen;
4.12 in een gegeven context een formule opstellen of, als de formule is gegeven, de karakteristieke eigenschappen van de bijbehorende grafiek bepalen en de resultaten ervan terugvertalen naar de context.

Subdomein B2: Vergelijkingen en ongelijkheden
5. De kandidaat kan eenvoudige vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen, in voorkomende gevallen grafisch oplossen of de oplossingen numeriek benaderen en de oplossingen interpreteren in de context.

De kandidaat kent:
- de begrippen lineaire en eerstegraads vergelijking;
- de begrippen kwadratische en tweedegraads vergelijking;
- het begrip stelsel van vergelijkingen;
- het onderscheid tussen algebraïsch (exact) oplossen en andere oplossingsmethoden;
- de abc-formule.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
5.1 een vergelijking, die te herleiden is tot het type $ax + b = 0$, waarbij *a* en *b* constanten zijn, algebraïsch oplossen;
5.2 een vergelijking die te herleiden is tot het type $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij *a*, *b* en *c* constanten zijn algebraïsch oplossen;
5.3 een vergelijking die te herleiden is tot het type $x^n = c$, waarbij *c* en *n* constanten zijn. algebraïsch oplossen;
5.4 een vergelijking, die te herleiden is tot het type $a^x = c$ of ${}^a\log x = c$, waarbij *a* en c constanten zijn, algebraïsch oplossen;
5.5 een vergelijking oplossen van het type $f(x) = g(x)$, al dan niet met behulp van ICT, waarbij *f* en *g* functies zijn zoals genoemd in subdomein B1;
5.6 een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden oplossen, bijvoorbeeld met behulp van substitutie;
5.7 een ongelijkheid oplossen door de bijbehorende vergelijking op te stellen, deze op te lossen, en vervolgens het juiste interval te bepalen.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
5.8 een vergelijking dan wel een ongelijkheid opstellen aan de hand van een gegeven context, de vergelijking of ongelijkheid oplossen en de oplossingen van deze vergelijking of ongelijkheid interpreteren en hieraan conclusies verbinden binnen de context;
5.9 een vergelijking met een parameter oplossen en de oplossing schrijven als functie van de parameter.

Subdomein B3: Evenredigheidsverbanden
6. De kandidaat kan verbanden tussen twee grootheden a en b van de vorm

$a = c \cdot b^d$ herkennen, toepassen en bijbehorende grafieken tekenen, vanuit de beschrijving van een dergelijk verband een formule opstellen, de evenredigheidsconstante bepalen en redeneren over het effect van schaalvergroting.

De kandidaat kent:
- de begrippen recht evenredig, omgekeerd evenredig, evenredig met een macht, evenredigheidsconstante;
- het verschil tussen een lineair verband en een recht evenredig verband;
- formules van de vorm $y = cx$ en $y = \frac{c}{x}$ als respectievelijk recht evenredig en omgekeerd evenredig verband;
- de logaritmische schaalverdeling.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
6.1 aan de hand van een gegeven situatie bepalen of er sprake is van een recht evenredig of een omgekeerd evenredig verband;
6.2 met de algemene vorm van het machtsverband $a = c \cdot b^d$ rekenen;
6.3 in een concrete situatie van een machtsverband $a = c \cdot b^d$ (met $d \in \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$) tussen twee grootheden *a* en *b* de exponent *d* en de evenredigheidsconstante *c* bepalen;
6.4 de grafiek van een machtsverband tekenen in een assenstelsel met logaritmische schalen.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
6.5 een formule opstellen van een machtsverband dat is weergegeven als een rechte lijn in een assenstelsel met logaritmische schalen;
6.6 in een concrete situatie een vergelijking opstellen waarbij gebruik is gemaakt van het machtsverband tussen twee grootheden, de vergelijking oplossen en vervolgens de oplossingen interpreteren in relatie tot de gegeven situatie;
6.7 een gegeven verband $a = c \bullet b^k \bullet d^m$ interpreteren als: *a* is evenredig met b^k en *a* is evenredig met d^m;
6.8 als *P* evenredig is met L^v en *P* evenredig is met D^s, *P* schrijven als $P = c \bullet L^v \bullet D^s$;
6.9 machtsverbanden herkennen in formules met meerdere variabelen.

Subdomein B4: Periodieke functies

7. De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van sinus- of cosinusfuncties, de bijbehorende sinusoïden tekenen en de karakteristieke eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een eenvoudige goniometrische vergelijking op een gegeven interval bepalen.

De kandidaat kent:
- het verband tussen de eenparige cirkelbeweging en de goniometrische functies;
- de exacte waarden van sin *x* en cos *x* waarbij *x* een veelvoud van $\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$ is.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
7.1 graden omrekenen in radialen en omgekeerd;

7.2 de grafiek tekenen van functies van de vorm $f(x) = d + a \cdot \sin b(x - c)$ en $f(x) = d + a \cdot \cos b(x - c)$;

7.3 in concrete situaties vergelijkingen van het type $f(x) = k$ (indien mogelijk: algebraïsch) oplossen met *k* een constante en *f* een functie als hierboven genoemd;

7.4 in concrete situaties de periodiciteit gebruiken bij het vinden van alle oplossingen in een gegeven interval;

7.5 aan de hand van gegevens over een periodiek verschijnsel het bijbehorende functievoorschrift opstellen;

7.6 aan de hand van de grafiek van een sinusoïde het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

Productie

De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):

7.7 van een concrete situatie een sinusmodel opstellen, daarmee berekeningen uitvoeren en de resultaten interpreteren in termen van de concrete situatie.

Voorbeeldopgaven bij domein B

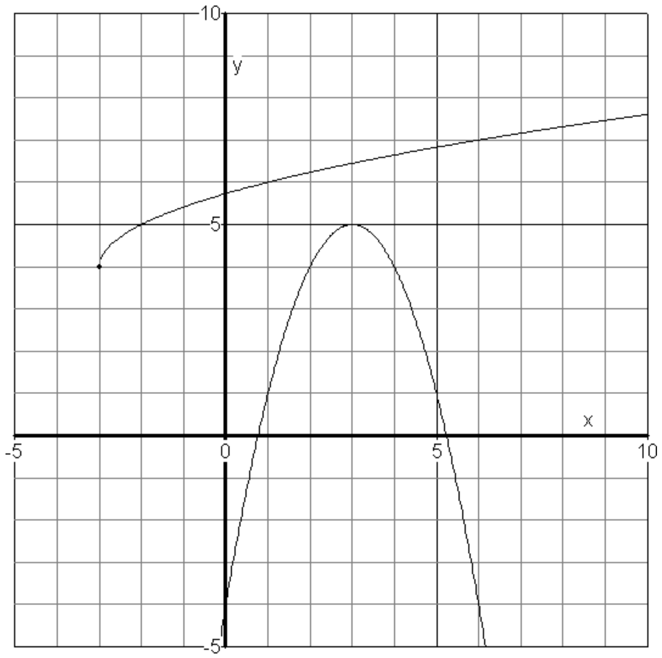
Subdomein B1

1 Beschrijf met welke transformaties de grafieken van de functies die gegeven zijn door $f(x)=(x-4)^2+6,\ f(x)=4\cdot 3^{2x},\ y=2+\log(x-5)$ en $y=-1+\sin(2x)$, kunnen ontstaan uit de grafiek van een standaardfunctie en schets deze grafieken.

2 De grafiek van de functie f die is gegeven door $f(x)=2-\dfrac{10}{2^x}$ heeft een horizontale asymptoot $y=a.$ Onderzoek wat de waarde van a is.

3 De grafiek van de functie f die is gegeven door $f(x)=2x^2+3x$ wordt getransleerd : 4 naar rechts en 5 naar boven. Hierdoor ontstaat een nieuwe grafiek. Bepaal het functievoorschrift dat hoort bij deze nieuwe grafiek, werk de haakjes uit en schrijf je antwoord zo kort mogelijk.

4



Hierboven zie je de grafieken van de functies $f(x)=b+\sqrt{x+a}$ en $g(x)=c-(x+d)^2$.
Bepaal de waarden van $a,\ b,\ c$ en d.

5 Bepaal op algebraïsche wijze het domein van de functie *f* die is gegeven door $f(x)=\log(4-x^2)$.

6 Verklaar waarom voor iedere waarde van *a* de vergelijking $2^x=-x+a$ slechts één oplossing heeft.

7 Op de grafiek van de functie *f* die is gegeven door $f(x)=\sqrt{2x+5}$ vindt een translatie plaats: 3 omhoog. Vervolgens wordt de zo ontstane grafiek ten opzichte van de *y*-as vermenigvuldigd met 2. Hierdoor ontstaat een nieuwe grafiek. Laat met een berekening zien of het punt (4, 6) op deze nieuwe grafiek ligt.

8 De grafieken van $f_p(x) = \sqrt{px - 4p}$ gaan voor alle waarden van *p* allemaal door hetzelfde punt *F*.
Bepaal de coördinaten van dat punt en bewijs dat inderdaad alle grafieken van f_p door dat punt gaan.

9 Gegeven $G = 10 \cdot \log(\frac{B}{10^{-12}})$

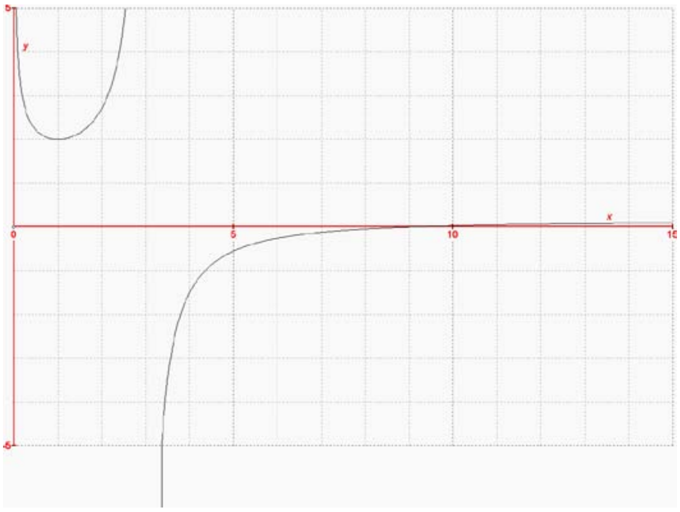
a. De formule voor *G* is ook te schrijven als $G = 10 \cdot \log(B) + p$. Bepaal *p* op algebraïsche wijze.
b. Met welk getal neemt *G* toe als *B* steeds 100 keer zo groot wordt? Hoe blijkt dit uit de formule?
c. Schrijf *B* als functie van *G*.

10 Gegeven is de formule $N_{\max} = \frac{8289,3}{B} \cdot (1,778 - \log(B))$, met domein [2, 9].
Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor $N_{\max}$ - dus zonder gebruik van de GR - kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.

11 Gegeven is $\frac{4}{5 + x^2}$. Vul voor $x = \frac{1}{4}$ in en bereken de exacte waarde van de breuk. Verklaar waarom er ongeveer 0,8 uit moe(s)t komen.

12 Gegeven de functie $f(x) = \log\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)$.
Beredeneer waarom de grafiek van *f* geen nulpunten heeft.

13 Gegeven is de functie *f* met $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x - 3}$. De grafiek van *f* staat hieronder.



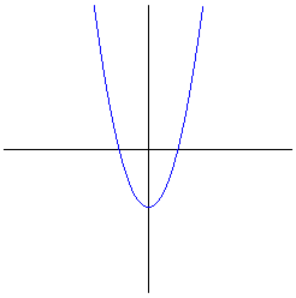
De grafiek van *f* snijdt de *x*-as in het punt (9, 0).
Beredeneer zonder gebruik te maken van de afgeleide functie waarom de grafiek van *f* een maximum heeft.

14 Gegeven de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2\sin(x) + 3}$

Beredeneer waarom de grafiek van *f* geen verticale asymptoot heeft.

15 Hieronder staat een schets van de grafiek van de functie *f*.

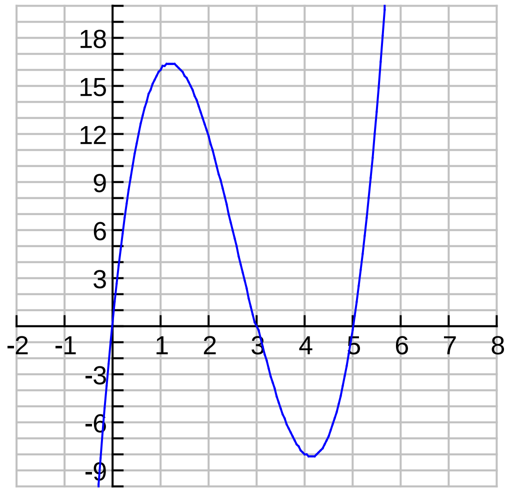
Schets de grafiek van de functie $g = \dfrac{1}{f}$.



16 Gegeven de functie $f(x) = 4x + \dfrac{6}{x}$ voor positieve *x*-waarden. Deze functie is opgebouwd uit de functies $g(x) = 4x$ en $h(x) = \dfrac{6}{x}$.

Beredeneer aan de hand van het functievoorschrift dat de grafiek van *f* een minimum heeft.

17 Voor zekere waarden van *a*, *b*, *c* en *d* is hieronder de grafiek getekend van $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$



a. Leg uit hoe de grafiek van *y* verandert als *d* groter wordt.
b. Bepaal de waarden van *a*, *b*, *c* en *d* die passen bij de grafiek. Je kunt gebruik maken van het feit dat de formule van *y* te schrijven is als: $y = \ldots x(x-3)(x-5)$

18 Van een exponentieel groeiproces waarvan de tijd *t* gemeten wordt in uren en de functiewaarde *V* gemeten wordt in m^3 is gegeven dat de beginwaarde 16 m^3 is. Verder is gegeven dat $V(4) = 625$ m^3.

a. Stel de formule op van *V* als functie van *t*.
b. Bereken het groeipercentage per kwartier.

c. Bereken het tijdstip *t* waarop *V* = 10 000 m³.

19 Hoe presteert een lange afstandloper op een kortere afstand? En als je weet hoe snel iemand op de 100 meter loopt, kun je dan ook voorspellen hoe lang hij over de 10 km loopt? Daar gaat deze opgave over.
We nemen aan dat de atleet steeds met een constante snelheid (*v*) loopt.

In deze opgave gaan we er van uit dat er een verband bestaat tussen de afstand *s* (in meter) die gelopen wordt en de snelheid *v* (in km/u), die de atleet loopt: $v = 20 - {}^{2}\log(\frac{s}{10000})$

a. Bereken de tijd waarin de atleet de 10 000 meter loopt.

b. Toon aan hoe je deze formule om kunt schrijven naar $v = 33{,}3 - {}^{2}\log(s)$.

In het vervolg kun je steeds een van beide formules kiezen.

c. Onderzoek hoe de snelheid verandert als de atleet een vier keer zo grote afstand loopt. Geef een algemeen bewijs, geen getallenvoorbeelden.

d. Bereken een formule voor de inverse (anders gezegd: maak een formule voor *s* uitgedrukt in *v.*

Subdomein B2

1 Los exact op

a. $x^3 - x = 0$

b. $x(x-2)(x+2) = x+2$

c. $\frac{v}{v+1} = -2$

d. $(x-3)^2 = 16 \Rightarrow x-3 = 4 \text{ of } x-3 = -4 \text{ etc.}$

e. $\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} - 3 = 0$

f. $2x - 4 = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$. De oplossing is $x = \frac{4+\sqrt{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$

g. $x^2 + 5x + \frac{1}{4} = 0$

1) Met kwadraatafsplitsen: $(x+\frac{5}{2})^2 - 6 = 0$, dus $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{6}$ of $-\frac{5}{2} - \sqrt{6}$

2) Met de abc-formule: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{24}}{2}$

h. $\frac{4}{x} \leq x$

i. $\sqrt{(p+1)} + 6 \geq p$

j. $2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 10 = 0$ (noem $2^x = p$)

k. $x^4 - x^2 - 6 = 0$

2 (*CE havo wiskunde B1,2 2005-I vraag 22)*
Gegeven is de familie functies (voor elke waarde van *p*): $f(x) = (x+4)(p+4x-x^2)$.

De grafiek van *f* heeft twee toppen *A* en *B*. Punt *A* ligt links van de *y*-as en punt *B* rechts van de *y*-as. Aangetoond kan worden dat de *x*-coördinaten van deze twee toppen (x_A en x_B) als volgt afhangen van de waarde van *p*:

$x_A = -\sqrt{\dfrac{p+16}{3}}$ en $x_B = \sqrt{\dfrac{p+16}{3}}$.

Bereken algebraïsch voor welke waarde van *p* geldt dat $x_B = 8$.

3 De vergelijking $\sqrt{x} + 1 = x$ omwerken tot $x = (x-1)^2$, met $x \geq 1$; vervolgens kan deze tweedegraadsvergelijking exact worden opgelost.

4 Gegeven zijn de lijnen l en m door de vergelijkingen $l: 2x - 3y = 10$ en $m: 3x + py = 7$.

a. De lijnen l en m snijden elkaar in een punt met *x*-coördinaat 8. Bereken *p*.

b. De lijnen l en m zijn evenwijdig. Bereken *p*.

5 Gegeven $y = x^2 + 4x + p$.

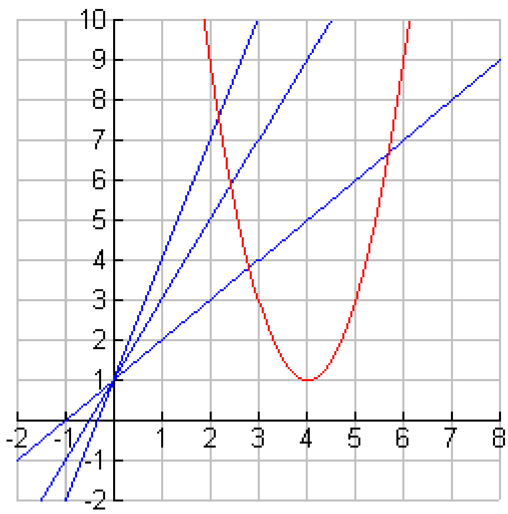
De grafiek van *y* raakt de *x*-as. Bereken *p*.

6 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x + 5$ en $g(x) = -4x - 2x^2$. Bereken op een exacte manier de oplossingen van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$.

7 We bekijken de lijnenfamilie $y = p \cdot x + 1$. Bij iedere waarde van *p* hoort een lijn.
Elke lijn van deze familie gaat door het punt (0,1). In de figuur hieronder zie je de lijnen getekend voor *p* = 1, 2 en 3. Je ziet ook de grafiek van de parabool
$y = 2 \cdot (x-4)^2 + 1$.

.

We bekijken nu $y = p \cdot x + 1$.
Bereken voor welke waarden van *p* de lijn de parabool raakt (en dus één snijpunt met de parabool gemeen heeft).



8 Wegen bevatten vuil en bij regen worden de wegen schoongespoeld.
Bij het ontwerpen van wegen gebruiken ingenieurs onder andere de volgende formule:

$P = 100 \cdot (1 - 2{,}7^{-c \cdot t})$.

Deze formule heeft te maken met dit schoon regenen van een weg; *P* is het percentage van de hoeveelheid vuil dat bij een regenbui van *t* uur wordt weggespoeld van de weg. De constante *c* is positief en afhankelijk van het materiaal van de weg.

Voor asfalt geldt dat *c* gelijk is aan 0,25; voor beton geldt dat *c* = 0,05.

a. Leg met behulp van een schets van de grafieken uit welk van de twee soorten wegen (asfalt of beton) sneller schoongespoeld wordt door de regen.

Voor iedere keuze van *c* geldt dat de grafiek van *P* stijgt.

b. Leg met behulp van de formule voor *P* uit dat de grafiek inderdaad stijgt.

Voor een zekere weg geldt dat de helft van het vuil is weggespoeld na een regenbui van 2 uur.

c. Bereken op algebraïsche wijze de waarde van *c* voor deze weg en rond daarna je antwoord af op twee decimalen.

Vaak wil je weten hoeveel regentijd er (bij een gegeven weg) nodig is om een bepaald percentage vuil te laten wegspoelen. Bijvoorbeeld hoeveel regentijd is er bij een weg met *c* = 0,30 nodig om 40% van het vuil te laten wegspoelen.
Je zou nu iedere keer een (ingewikkelde) vergelijking moeten oplossen.
d. Neem *c* = 0,25 en maak een formule voor de regentijd *t*, uitgedrukt in *P*.

9 In de NRC stond enkele jaren geleden een tabel met exponentieel groeiende verschijnselen met hun verdubbelingstijden (de tijd waarin de hoeveelheid twee keer zoveel wordt).

	Groeifactor (per jaar)	Verdubbelingstijd (in maanden)
Wetenschappelijke tijdschriften in de wereld	1,03	281
Echtscheidingen in Nederland	1,05	170
Benzineverbruik in Nederland	1,07	123
Aluminiumverbruik in de wereld	1,08	108
Personenauto's in Nederland	1,13	68
Computergebruik in Nederland	1,50	

a. Bereken de verdubbelingstijd voor Computergebruik in Nederland.

Naast 'verdubbelingstijd' bij stijgende exponentiële functies, wordt bij dalende exponentiële functies gesproken over 'halveringstijd'. De radioactieve stof Cesium-137 heeft een halveringstijd van 30 jaar, dat wil zeggen dat in 30 jaar de stralingsintensiteit met de helft afneemt.
b. Bereken met hoeveel procent de straling per jaar afneemt.

De tijd die nodig is om *p*% van de straling te laten verdwijnen, noemen we *T* .
De groeifactor van de exponentiële formule is *g*.
c. Geef een formule waarmee *T* wordt uitgedrukt in *g* en *p*.

10. Een atleet wil een bepaald trainingsschema volgen. De hoogte waarop hij gaat trainen is nog niet vastgesteld. Het verband tussen de hoogte en het percentage van zijn maximale zuurstofopname (VO_2max) dat hij nodig heeft voor dit trainingsschema wordt gegeven door de formule $P = \dfrac{6000}{115 - 0,01h}$. Hierin is *h* de hoogte in meter met $h \geq 1500$ en *P* het percentage van de VO_2max van de atleet op hoogte *h* dat nodig is voor het trainingsschema.

a. Bereken op algebraïsche wijze op welke hoogte het percentage *P* gelijk is aan 80%.

Voor een atleet is het interessant om te weten op welke hoogte hij moet gaan trainen om een bepaald percentage van zijn VO_2max te behalen. Hiervoor is het handig om *h* te schrijven als functie van *P*.
b. Schrijf met behulp van bovenstaande formule *h* als functie van *P*.

Subdomein B3

1 Bij natuurkunde wordt de formule voor kinetische energie geleerd: $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

a. De kinetische energie *E* is recht evenredig met de massa m .
Wat is de evenredigheidsconstante?

b. De kinetische energie *E* is evenredig met het kwadraat van de snelheid v .
Wat is de evenredigheidsconstante?

c. Schrijf de formule in de vorm *v* = … en formuleer op dezelfde manier de twee evenredigheden die daarin kunnen worden gezien.

2 De remweg *R* van een auto hangt onder andere af van de remkracht *F*.
Hieronder zie je een tabel met meetgegevens. Onderzoek of de grootheden *R* en *F* (bij benadering) omgekeerd evenredig zijn.

kracht *F* (in kN)	remweg *R* (in meter)
4,0	62,5
6,0	41,7
8,0	31,3
10,0	25,0
12,0	20,8

3 Als je hoog staat kun je verder kijken. Dit is onder andere een gevolg van het feit dat de aarde bol is. In onderstaande tabel zie je de ooghoogte *h* (boven zeeniveau) en de horizonafstand (hoe ver kun je kijken) *d.*

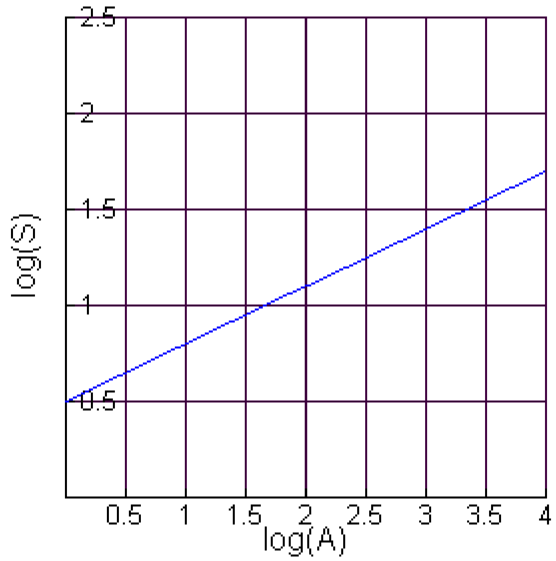
ooghoogte *h* (in meter)	horizonafstand *d* (in km)
10,0	11,0
13,0	12,5
16,0	14,0
22,0	16,4
64,0	28,0
67,0	28,6

a. Toon aan dat *d* bij benadering rechtevenredig is met $\sqrt{h}$.

b. Geef een formule voor *d* als functie van *h.* Rond de evenredigheidsconstante af op één decimaal.

c. Hoe hoog moet je oog boven zeeniveau zijn om de horizon te zien op een afstand van 100 km ?

4 Volgens een theorie is er een verband tussen de oppervlakte *A* van een eiland en het aantal soorten reptielen *S* op dat eiland. De lijn hieronder is de grafiek die bij dit verband hoort.

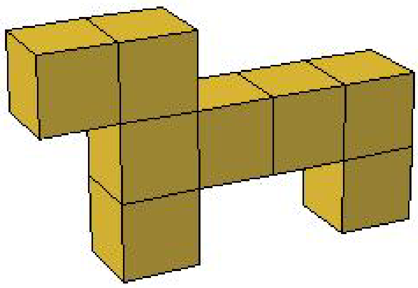


Let op: langs de assen zijn niet *A* en *S* uitgezet maar log(*A*) en log(*S*).
A = oppervlakte in vierkante mijlen, *S* is aantal soorten reptielen.

a. Lees met behulp van deze figuur af hoeveel soorten *S* je verwacht op een eiland met een oppervlakte *A* van 250 vierkante mijlen. Geef duidelijke uitleg.

b. Voor het verband tussen *S* en *A* geldt de formule $S = c \cdot A^d$. Bereken *c* en *d* in twee decimalen nauwkeurig.

5 Hieronder zie je een lichaam dat is opgebouwd uit 8 dezelfde kubusjes, met ribbe *r*.
Voor de inhoud *V* van het lichaam geldt de formule: $V = 8 \cdot r^3$



a. Leg uit dat voor de oppervlakte *A* van het lichaam geldt: $A = 34 \cdot r^2$

Nu is er een formule voor de oppervlakte te maken, die de oppervlakte *A* uitdrukt in de inhoud *V*. Zo'n formule is van de vorm: $A = c \cdot V^d$

b. Bereken de exacte waarden van *d* en *c*.

6 In de 17e eeuw vond Kepler een verband tussen de omloopstijd van de planeten rond de zon (*T*) en de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon (*R*): $T^2 = c \cdot R^3$
De waarde van de constante *c* is voor alle planeten gelijk.
T wordt uitgedrukt in dagen en *R* uitgedrukt in A.E. Voor de aarde geldt: *R* = 1 A.E. en *T* = 365 dagen.

a. Geef de formule voor *T*, uitgedrukt in *R*.

b. Bereken de omlooptijd van Mars, met R_{mars} = 1,524 A.E.

7 De Amerikaanse veearts Max Kleiber deed onderzoek naar het verband tussen de lichaamsmassa van dieren en de warmteproductie van dat dier. In de tabel zie je enkele gegevens van zijn onderzoek. Ter vereenvoudiging werken we hier slechts met 3 waarnemingen.

lichaamsgewicht in kg (*L*)	warmteproductie per dag in kcal (*W*)		log(*L*)	$\log(\frac{W}{100})$	
20	946				
56	2039				
260	6470				

a. Toon aan dat *L* niet rechtevenredig met *W* kan zijn.

b. Toon aan dat log(*L*) en $\log(\frac{W}{100})$ (bij benadering) wel rechtevenredig zijn.

c. Omdat log(*L*) en $\log(\frac{W}{100})$ rechtevenredig zijn, geldt er: $\log(\frac{W}{100}) = a \cdot \log(L)$.
Toon aan dat $a = 0,75$ (afgerond op 2 decimalen).

d. Druk *W* uit in *L* in een formule zonder logaritmen.

Subdomein B4

1 $a = \sin(\frac{1}{2}\pi - x) \cdot \cos(\frac{5}{12}\pi - x)$. Bereken de exacte waarde van *a* als $x = \frac{1}{6}\pi$.

2 Geef alle exacte oplossingen:

a. $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b. $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$

3 Bepaal de exacte coördinaten van de top(pen) van de grafiek van

a. $f(x) = \frac{1}{2} + 2\sin(2(x - \frac{1}{3}\pi))$ met $0 \leq x \leq 2\pi$

b. $g(x) = 3\sin(2x + \pi) + 4$ met $0 \leq x \leq \pi$

4 (*naar CE havo wiskunde B, 2009-I*)
Op het interval [$-\pi$, π] zijn gegeven de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.
Hiermee wordt de functie h gedefinieerd: $h(x) = \sin(x) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$

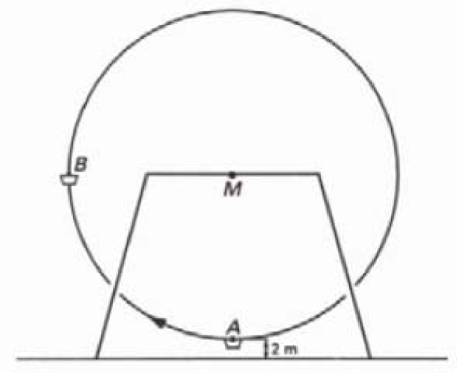
a. Maak een nette schets van de grafiek van de functie h op het gegeven interval.

b. Bereken op algebraïsche wijze de *x*-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van *h* met de *x*-as.

5 (*uit CE havo wiskunde B1,2 2008-I*)
Het verloop van de temperatuur kan gedurende de 24 uren van een dag nogal grillig zijn. In vereenvoudigde vorm is het temperatuurverloop gedurende een dag redelijk te benaderen door een sinusoïde met een periode van 24 uur.
Het KNMI hanteert voor De Bilt voor de dagen in de maand juni de volgende waarden: de maximumtemperatuur is 21,0 °C, deze wordt bereikt om 3 uur ’s middags; de minimumtemperatuur is 12,2 °C. *T* is de temperatuur in graden Celsius op een dag in juni en *u* is het aantal uren na middernacht.

Stel een formule op van het verband tussen *T* en *u*.

6 In pretparken en op kermissen zie je vaak een reuzenrad. Hieronder is zo'n reuzenrad getekend met bakje *A* en bakje *B* als voorbeeld. Het rad heeft een straal van 18 meter. Punt *M* stelt de as voor. De draaisnelheid is constant, het rad draait in 48 seconden één keer rond.
In de laagste stand is het ophangpunt van het bakje 2 meter boven de grond.



H is de hoogte van het ophangpunt van bakje *A* in meters.

a. Stel een formule op van *H* als functie van de tijd *t* in seconden. Neem $t = 0$ op het moment dat bakje *A* onderaan is.
b. Bereken hoeveel seconden per omwenteling *H* meer dan 25 meter is.
c. Hoe groot is de maximale snelheid (in m/s) waarmee bakje *A* tijdens een omwenteling omhoog gaat?

Domein C: Meetkundige berekeningen (120 slu)

Opmerking 1: dit domein betreft de meetkunde in het platte vlak. De ruimte kan wel als context optreden waarin de vlakke meetkunde zich voordoet.

Opmerking 2: de specificaties in dit domein gaan voor wiskundige toepassingen uit van een cartesisch assenstelsel.

Subdomein C1: Afstanden en hoeken in concrete situaties

8. De kandidaat kan afstanden en hoeken berekenen met behulp van goniometrische verhoudingen, de stelling van Pythagoras en de sinus- en cosinusregel.

De kandidaat kent:
- de stelling van Pythagoras;
- het begrip gelijkvormigheid;
- de definitie van sinus, cosinus en tangens als verhoudingen van zijden in een rechthoekige driehoek;
- de sinusregel;
- de cosinusregel;
- het begrip afstand als de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen twee meetkundige figuren.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
8.1 sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het bepalen van hoeken en zijden in een gegeven driehoek;
8.2 de stelling van Pythagoras gebruiken om de afstand tussen twee gegeven punten te bepalen;
8.3 de sinus- en cosinusregel gebruiken voor het berekenen van afstanden en hoeken.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
8.4 bij het oplossen van een complex probleem (meerdere stappen voor oplossing nodig) een doelbewuste keuze maken uit bovengenoemde technieken om tot een efficiënte oplossingsmethode te komen;
8.5 In de context van de drie dimensionale ruimte berekeningen in het platte vlak uitvoeren en de resultaten interpreteren binnen de context.

Subdomein C2: Analytische methoden

9 De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren aan de hand van gegeven contexten en figuren.

De kandidaat kent:
- de vergelijking van een rechte lijn in de vorm $y = ax + b$ en in de vorm $ax + by = c$;
- het begrip richtingscoëfficiënt;
- de eigenschap dat wanneer twee lijnen loodrecht op elkaar staan het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1 en vice versa;
- van een cirkel met straal *r* en het middelpunt (*a*, *b*) de vergelijking in de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$;
- een stelsel van twee lineaire vergelijkingen als weergave van de onderlinge ligging van twee lijnen.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
9.1 aan de hand van de vergelijkingen van twee lijnen de hoek tussen deze twee lijnen berekenen;
9.2 de vergelijking van de loodlijn door een gegeven punt op een lijn via algebraïsche weg opstellen;
9.3 uit de vergelijking van een cirkel de straal van de cirkel en de coördinaten van het middelpunt afleiden en daarbij eenvoudige gevallen van kwadraatafsplitsing uitvoeren;
9.4 de coördinaten van de snijpunten van twee gegeven lijnen berekenen;
9.5 de oplosbaarheid van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in verband brengen met de onderlinge ligging van rechte lijnen in het platte vlak;
9.6 de lengte van een lijnstuk berekenen met behulp van de coördinaten van de eindpunten.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
9.7 de coördinaten van de snijpunten van een gegeven lijn en een gegeven cirkel berekenen;
9.8 de afstand tussen een punt en een lijn met analytische methoden berekenen;
9.9 de afstand tussen een punt en een cirkel met analytische methoden berekenen;
9.10 de afstand tussen twee evenwijdige lijnen met analytische methoden berekenen;
9.11 de afstand tussen een lijn en een cirkel met analytische methoden berekenen;
9.12 het aantal snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen.

Subdomein C3: Vectorrekening
10. De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met vectoren in het platte vlak en het inwendig product van twee vectoren wiskundig en fysisch interpreteren.

De kandidaat kent:
- het begrip vector als grootheid met lengte en richting;
- het begrip lengte van een vector;
- het begrip richtingshoek van een vector;
- het begrip componenten van een vector;
- het begrip kolomnotatie;
- het inwendig product (of inproduct) van twee vectoren a en b als $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$ en $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$;
- het begrip kentallen van een vector.

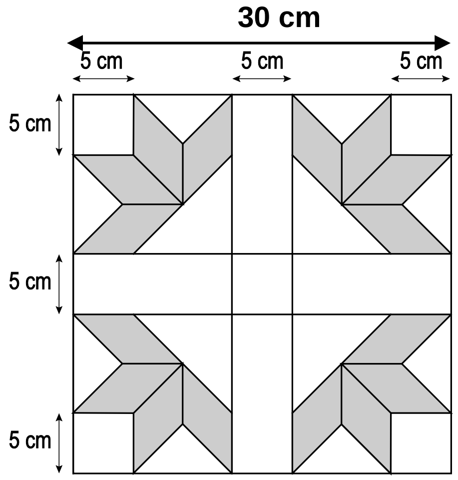
Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
10.1 een vector schrijven in kolomnotatie;
10.2 de lengte van een gegeven vector berekenen;
10.3 de richtingshoek van een gegeven vector berekenen;
10.4 een gegeven vector ontbinden in zijn componenten, zowel meetkundig als analytisch;
10.5 de componenten van een vector uitdrukken met behulp van sinus en cosinus;
10.6 vectoren meetkundig en analytisch optellen en aftrekken en een vector scalair vermenigvuldigen;
10.7 van twee vectoren het inproduct bepalen op twee manieren, namelijk met behulp van $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$ en $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ **;**
10.8 het inproduct gebruiken om de hoek tussen twee lijnen in een vlak te berekenen.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
10.9 bewerkingen met vectoren uitvoeren en interpreteren.

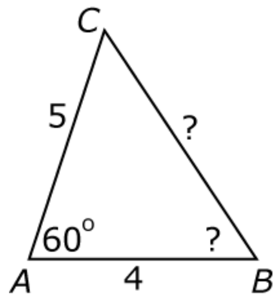
Voorbeeldopgaven bij domein C

Subdomein C1

1 (*uit CE vmbo wiskunde GT 2008-I*)
Hiernaast staat een afbeelding van een vierkant van 30 bij 30 cm, waarin een patroon is aangebracht.
Het vierkant is verdeeld in 5 vierkanten, 4 rechthoeken, 8 kleine en 4 grote rechthoekige, gelijkbenige driehoeken.
In het ontwerp zitten ook 16 even grote parallellogrammen die in de tekening met grijs aangegeven zijn.
Van zo'n parallellogram is de ene zijde 5 cm.
Bereken in één decimaal hoeveel cm de lengte van de andere zijde is.

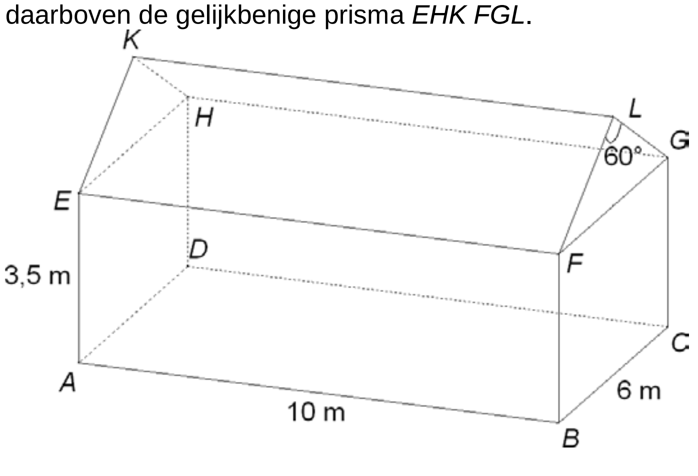


2 Hiernaast staat driehoek *ABC* getekend.
a. Bereken zijde *BC* exact.
b. Bereken $\angle B$ afgerond op hele graden.
c. Bereken de exacte afstand van punt *B* tot zijde *AC*.



3 Kun je in een cilinder met straal 5 en hoogte 8 een dun onbuigzaam staafje stoppen met lengte 13? Geef een berekening.

4 Hieronder staat een schets van een huisje. Het bestaat uit de balk *ABCD EFGH*, met daarboven de gelijkbenige prisma *EHK FGL*.

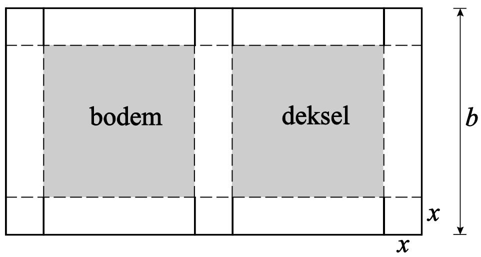


a. Bereken de lengte van *AG* in hele dm nauwkeurig.
b. De nokhoek van het dak is 60°, dus $\angle EKH = \angle FLG = 60°$. Bereken de totale hoogte van het huisje.

5 (*uit CE vwo wiskunde B1 2009-I*)

Deze opgave gaat over dozen die op een bepaalde manier uit een rechthoekig stuk karton worden gemaakt. Denk aan een pizzadoos. Zie de tekening.

Neem een stuk karton met een breedte van *b* cm. Wil je een doos maken die *x* cm hoog wordt, dan moet je voor de lengte van het stuk karton $2b - x$ cm nemen. Op zes plaatsen worden vierkantjes van *x* bij *x* cm losgesneden en omgevouwen. De stippellijnen zijn vouwlijnen; de doorgetrokken lijnen zijn snijlijnen. Bodem en deksel zijn allebei vierkant.



Voor de inhoud $I(x)$ van zo'n doos, in cm^3, geldt de formule:

$I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x \quad (0 < x < \frac{1}{2}b)$

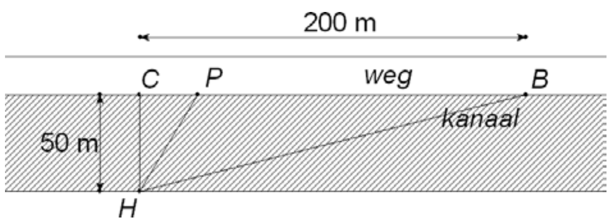
a. Toon de juistheid van deze formule aan.

Voor elke positieve waarde van *b* heeft de inhoud *I*(*x*) een maximale waarde.

Dit maximum wordt bereikt voor $x = \frac{1}{6}b$.

b. Toon aan dat deze waarde van *x* juist is.

6 Familie Jansen woont langs een kanaal. De oude waterleiding moet worden vervangen. Deze nieuwe leiding moet vanuit punt *B* aan de overkant naar huis *H* worden gelegd. Zie tekening.



Er zijn verschillende mogelijkheden:

De leiding kan langs de weg tot punt *C* recht tegenover *H*, en dan onder water naar *H*. De leiding kan ook geheel onder het water, dus volgens route *BH*. Tenslotte kan ook een deel langs de weg en een deel onder water, volgens route *BPH*.

De kosten onder het water zijn 400 euro per meter, langs de weg is het goedkoper, 250 euro per meter.

a. Laat met een berekening zien dat 'geheel onder water' duurder is dan de route *BCH*.

b. Mevrouw Jansen denkt dat het nog voordeliger kan door gedeeltelijk langs de weg en gedeeltelijk onder water te gaan.

Neem *CP* = *x* (in meter) en toon aan dat voor de kosten *K* in euro van de aanleg geldt:

$K = 5000 - 25x + 40\sqrt{x^2 + 2500}$.

c. Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van *x* de kosten *K* zo laag mogelijk zijn.

Subdomein C2

1 Gegeven zijn de lijnen $k: y = \frac{1}{5}x - 4$ en $l: y = 4 - 2x$.

Bereken in gehele graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van beide lijnen elkaar snijden.

2 Lijn k gaat door de punten (-3, -4) en (2, 6). Punt A met $x_A = -5$ ligt op lijn k. Verder is gegeven dat lijn l door punt A gaat en dat deze lijn loodrecht staat op de grafiek van lijn k. Stel via algebraïsche weg de vergelijking van lijn l op.

3 Stel de vergelijking op van de cirkel met het middelpunt (-5, 2) die gaat door het punt (2, 4).

4 Van een cirkel is gegeven de vergelijking $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 23$. Leid uit deze vergelijking af wat de coördinaten van het middelpunt van de cirkel zijn en wat de straal van de cirkel is.

5 Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen $\begin{cases} y = 2x \\ 3x + ay = 5 \end{cases}$

Voor welke waarde van *a* heeft dit stelstel geen oplossing?

6 Gegeven zijn de punten *A*(–3, 6), *B*(6, 0) en *C*(18, 18).

a. Bereken de lengtes van *AB*, *BC* en *AC*.

b. Toon aan dat driehoek *ABC* rechthoekig is.

7 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de vergelijking $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ met de lijn $y - 4x = 1$.

8 Gegeven is de cirkel *C*: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$, de lijn *m*: $y = -x + 20$ en het punt *A*(10, 10).
a. Bereken de exacte afstand van punt *A* tot cirkel *C*.
b. Bereken de exacte afstand van lijn *m* tot cirkel *C*.
c. Stel formules op voor de lijnen die op afstand 4 van lijn *m* liggen.

De lijn *m* wordt evenwijdig verschoven zodat de nieuwe lijn precies één snijpunt met cirkel *C* heeft.
d. Bereken de vergelijkingen van deze nieuwe lijnen.

9 Gegeven zijn de cirkels C_r: $(x-5)^2 + (y-8)^2 = r^2$.
a. Bereken voor welke waarden van *r* het punt *A*(2, 0) binnen de cirkelboog ligt.
b. Bereken voor welke waarde van *r* de cirkel precies één snijpunt heeft met de lijn $y = x$.

11 Gegeven zijn de punten *A*(0, 10) en *B*(6, 8).
Bereken de coördinaten van het punt *P* op de *y*-as, waarvoor geldt dat *AP* = *BP*.

12 Gegeven is rechthoekige driehoek *ABC* met *AB* = 3, *BC* = 4 en *AC* = 5.
Bereken dan de straal van de cirkel die door de punten *A*, *B* en *C* gaat.

13 Gegeven is vierkant ABCD met zijde 6. *P*, *Q, R* en *S* zijn de middens van de zijden *BC*, *CD, AD* respectievelijk *AB*. Door de lijnen *AP*, *BQ*, *CR* en *DS* wordt een vierkant ingesloten.

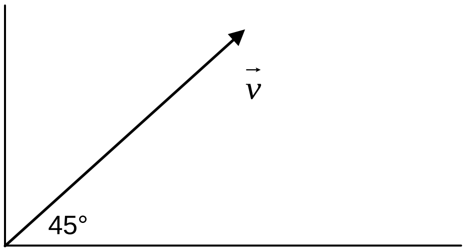
Bereken de exacte oppervlakte van dit vierkant.
Tip: maak een duidelijke tekening, en kies een assenstelsel met de x-as langs zijde AB en de y-as langs de zijde AD.

Subdomein C3

1 Gegeven is telkens een vector $\vec{v}$ door zijn *x*- en *y*-kentallen. Bereken de lengte en de richtingshoek van deze vector.

a. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

2



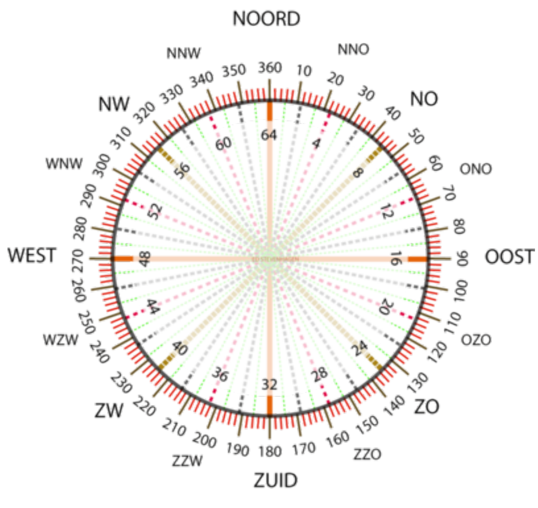
De lengte van de vector $\vec{v}$ is 400. Bepaal de kolomnotatie van $\vec{v}$.

3 Bereken de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 Voor welke waarden van *a* staan de vectoren $\begin{pmatrix} a \\ 6 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a-7 \\ 1 \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar?

5 Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld *T* en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h in de koers 30° ten opzichte van het Noorden.
Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken.

a. Maak van deze vlucht een tekening op schaal.
b. Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld *T* door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd.
Bepaal de koers voor de helikopter.



Domein D: Toegepaste analyse 1 (120 slu)

Subdomein D1: Veranderingen

11. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van een functie, gegeven door grafiek, tabel of formule, beschrijven door middel van toenamediagrammen en differentiequotiënten en kan differentiequotiënten berekenen en interpreteren, ook vanuit een profielspecifieke probleemsituatie.

De kandidaat kent:
- het begrip interval en de intervalnotatie;
- de begrippen toenamediagram en differentiequotiënt;
- de notatie Δ voor een differentie en $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ voor een differentiequotiënt;
- het begrip gemiddelde verandering op een interval.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
11.1 vanuit een gegeven toenamediagram conclusies trekken over het verloop van een grafiek en die grafiek schetsen;
11.2 een toenamediagram bij een gegeven grafiek, tabel of formule tekenen en daaruit conclusies trekken;
11.3 differentiequotiënten berekenen in geval de functie is gegeven door een grafiek, tabel of formule;
11.4 differentiequotiënten interpreteren als maat voor de gemiddelde verandering op een interval.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
11.5 in een situatie de relevante variabelen vaststellen en het veranderingsgedrag van de variabelen beschrijven met behulp van toenamediagrammen en differentiequotiënten;
11.6 differentiequotiënten interpreteren als mate van gemiddelde verandering in profielspecifieke probleemsituaties.

Subdomein D2: Afgeleide functies

12. De kandidaat kan de afgeleide functie begripsmatig interpreteren, lokale veranderingen van een functie benaderen, zowel met een differentiaalquotiënt als numeriek-grafisch, en kan de afgeleide functie van machtsfuncties met rationale exponenten bepalen.

De kandidaat kent:
- de begrippen differentiaalquotiënt, helling, richtingscoëfficiënt en raaklijn;
- de begrippen differentiëren en afgeleide functie;
- de diverse notaties voor de afgeleide functie, zoals $f\,'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$;
- de begrippen lokaal en globaal.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
12.1 een differentiaalquotiënt benaderen door differentiequotiënten met afnemende intervalgrootte te berekenen in geval de functie is gegeven door een formule;
12.2 bij afnemende intervalgrootte differentiequotiënten interpreteren als benadering van de steilheid of helling van de grafiek in een gegeven punt;

12.3 het differentiaalquotiënt interpreteren als de helling van een grafiek in een punt en daarmee een vergelijking van de raaklijn opstellen;
12.4 de globale grafiek van de afgeleide functie schetsen in geval de functie is gegeven door een grafiek;
12.5 de globale grafiek van de functie schetsen als de grafiek van de afgeleide functie is gegeven;
12.6 conclusies trekken over het veranderingsgedrag van de grafiek van een functie op basis van de afgeleide functie;
12.7 de afgeleide bepalen van machtsfuncties met rationale exponenten.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
12.8 de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van het veranderingsgedrag van een functie, ook in concrete situaties.

Subdomein D3: Bepaling afgeleide functies
13. De kandidaat kan voor het bepalen van de afgeleide functie en de interpretatie daarvan binnen een context gebruik maken van de som-, verschil-, product-, quotiënt-en kettingregel.

De kandidaat kent:
- de som-, verschil-, product-, quotiënt- en kettingregel voor differentiëren;
- de differentieerregels voor machtsfuncties met gehele, gebroken en negatieve exponenten.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):
13.1 de som-, verschil-, product- en/of quotiëntregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide functie;
13.2 de kettingregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van enkelvoudig samengestelde functies;
13.3 het verband aangeven tussen de afgeleide van een functie $f(x)$ en die van $f(x)+c$, $f(x+c)$, $c \cdot f(x)$ en $f(c \cdot x)$.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
13.4 een eenvoudige combinatie van som-, verschil, product en/of quotientregel gebruiken bij het bepalen van een afgeleide functie;
13.5 de kettingregel gebruiken in combinatie met de de som-, verschil-, product- en/of quotiëntregel bij het bepalen van een afgeleide functie;
13.6 een functievoorschrift anders schrijven zodat de functie gemakkelijker te differentiëren is.

Subdomein D4: Toepassing afgeleide functies
14. De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren gericht op onder meer optimaliseringsproblemen op meetkundige lichamen en figuren en op andere profielspecifieke contexten.

De kandidaat kent:
- de betekenis van de afgeleide functie als weergave van de helling van een grafiek van een functie.

Reproductie
De kandidaat kan (als voorbeeld van parate vaardigheden):

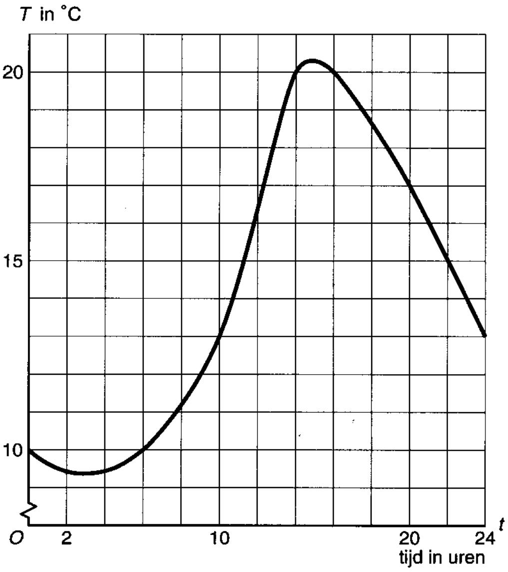
14.1 de afgeleide functie gebruiken bij het opstellen van de vergelijking van de raaklijn in een punt van de grafiek van een functie;
14.2 de afgeleide functie gebruiken bij het verifiëren en bij het bepalen van extreme waarden van een functie;
14.3 de afgeleide functie gebruiken bij het bepalen van de vergelijking van een raaklijn met een gegeven helling.

Productie
De kandidaat kan (als voorbeeld van het combineren van denkactiviteiten):
14.4 in profielspecifieke toepassingen de afgeleide functie gebruiken voor het bepalen van een optimale situatie;
14.5 een optimaliseringsprobleem vertalen in een formule waarbij een functie van één variabele optreedt en dit probleem vervolgens met behulp van de afgeleide functie of numeriek-grafisch oplossen.

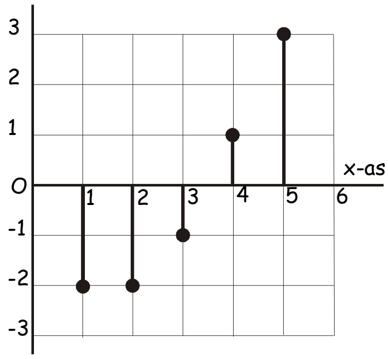
Voorbeeldopgaven bij domein D

Subdomein D1

1 De grafiek hiernaast gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.
   a. Op welk tijdsinterval is de grafiek toenemend stijgend?
   b. Bereken de gemiddelde temperatuursverandering op het interval [6, 20].
   c. Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ op het interval [14, 16].
   d. Bereken de snelheid waarmee de temperatuur toeneemt op het moment $t = 10$.
   e. Op welk moment is de snelheid waarmee T toeneemt dezelfde als op het moment $t = 10$? Licht je antwoord toe.
   f. Schets de hellinggrafiek van T.



2 Teken een grafiek die hoort bij het toenamediagram hiernaast als bovendien gegeven is dat de grafiek door het punt (3 , -2) gaat.



3 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x$

a. Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 4]$.

b. Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-1, 1]$.

4 Gegeven is de formule $s = \frac{t}{1+\sqrt{t}}$ Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

Benader in m/s de snelheid op t = 4. Neem $\Delta t = 0,01$ en rond af op twee decimalen.

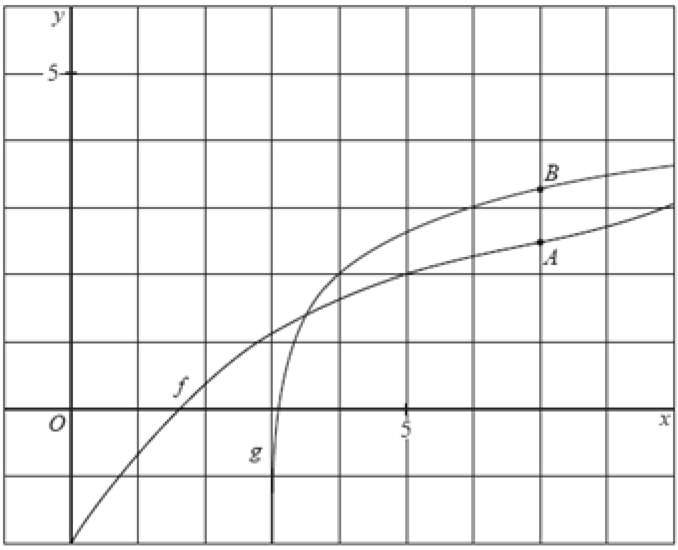
5 Gegeven is de functie $f(x) = -0,5x^2 + 4x$.

Het differentiequotiënt van f op het interval [2, a] is –0,5(a – 6).
Toon dit aan en bereken a in het geval dit differentiequotiënt gelijk is aan –4.

Subdomein D2

1 *(naar CE havo wiskunde B1 2008-II)*
Nadat met een koffiezetapparaat koffie is gezet, wordt de temperatuur van de koffie in de kan enige tijd gemeten. Een formule die hierbij hoort is $T = 23 + 49 \cdot 0.975^t$, met *t* in minuten en *T* in °C.
De snelheid (in °C per minuut) waarmee de koffie afkoelt op *t* = 5 is goed te benaderen met een differentiequotiënt op het interval [5; 5,001].
Benader op deze manier de snelheid van afkoelen op *t* = 5 in °C per minuut.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

2 *(CE havo B1 2007-II)*
In onderstaande figuur zie je twee grafieken getekend.
Het functievoorschrift van *f* is $f(x) = 0,01x^3 - 0,2x^2 + 1,55x - 2$ en het functievoorschrift van *g* is $g(x) = 2 + {}^3\log(x-3)$.



A is een punt op de grafiek van *f* en *B* is een punt op de grafiek van *g*. De *x*-coördinaat zowel *A* als *B* is 7. Zie de figuur.
a. Bereken de exacte waarde van de helling van de grafiek van *f* in *A* met behulp van differentiëren.

De helling van de grafiek van *g* in punt *B* kan benaderd worden met een differentiequotiënt op een voldoende klein interval.
b. Bereken op deze manier de helling van de grafiek van *g* in punt *B*. Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

3 *(uit CE havo wiskunde B1 2004-II)*
Uit onderzoek blijkt dat het aantal bacteriën van een bepaalde bacteriecultuur onder bepaalde omstandigheden gedurende de eerste vier weken benaderd kan worden door de formule

$$N = -100t^3 + 300t^2 + 900t + 1000 \quad (0 \leq t \leq 4)$$

Hierbij is *N* het aantal bacteriën en *t* de tijd in weken na *t* = 0.
a. Bereken met behulp van differentiëren tot welk tijdstip *t* het aantal bacteriën stijgt.
b. Bereken met behulp van de afgeleide functie van *N* op welk tijdstip *t* tussen 0 en 4 het aantal bacteriën het sterkst stijgt.

Subdomein D3

1 Differentieer de functies $f(x) = 2(x^2 - 3x)^4$ en $g(x) = \sqrt{10 - 25x}$.

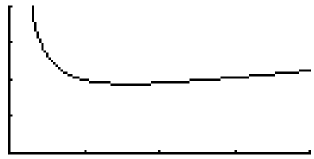
2 Differentieer de functies $f(x) = (x^2 + 2x + 9)(x - 1)$, $g(x) = x^2 + 3x \cdot \sqrt{x}$ en $h(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

3 Differentieer de functies $f(x) = 2x + \sqrt{2x-1}$ **,** $g(x) = 2x \cdot \sqrt{2x-1}$ **en** $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x}$

4 Differentieer $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{\sqrt{x}}$ **,** $g(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x}$ **,** $h(x) = \sqrt{10x^3}$ **en** $k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

Subdomein D4

1 Gegeven is $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$. Hiernaast staat een schets van de grafiek van *f*. De grafiek van *f* heeft voor *x* tussen 1 en 2 een minimum.
Bereken met differentiëren de exacte waarde van deze *x*.



2 (*naar CE havo wiskunde B1 2003-II*)
Een hartslagmeter registreert de hartfrequentie van een hardloper bij verschillende snelheden. *H* is de hartfrequentie in slagen per minuut en *V* is de snelheid in km per uur. Voor snelheden tussen 10 en 17 km per uur is het verband tussen *V* en *H* bijna lineair. Het verband tussen *V* en *H* wordt voor de hardloper bij benadering gegeven door de volgende twee formules:

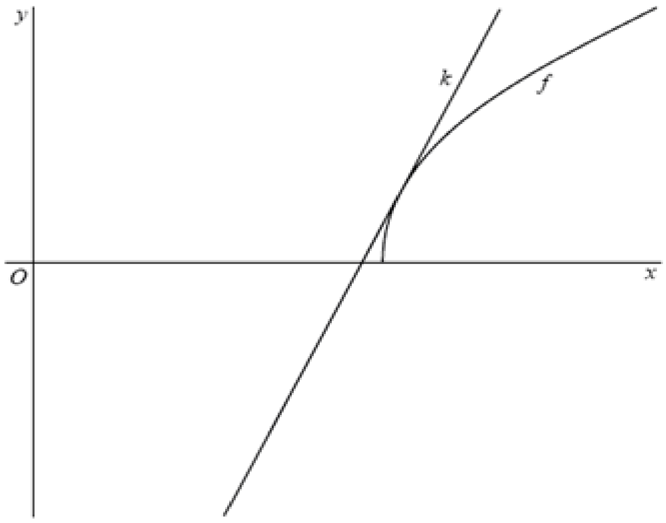
$H = 76{,}8 + 6{,}6V$ voor $10 \le V \le 17$

$H = 200 - (0{,}0545V - 0{,}836)^{-1}$ voor $V \ge 17$

De grafiek van het verband tussen *V* en *H* bestaat uit twee delen die bij *V* = 17 op elkaar aansluiten: beide formules geven bij *V* = 17 bij benadering dezelfde waarde voor *H*.
Onderzoek met differentiëren of de beide formules bij *V* = 17 ook ongeveer dezelfde helling geven.

3 Gegeven de functie $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20$, met $x > 0$. Tussen de *y*-as en het snijpunt van de grafiek met de *x*-as wordt een punt *A* op de grafiek gekozen. De projecties van *A* op de *x*-as en *y*-as noemen we respectievelijk *P* en *Q*.
Bereken exact hoe groot de oppervlakte van rechthoek *OPAQ* maximaal kan zijn.

4 (*uit CE havo wiskunde B1,2 2009-I*)
De functie *f* is gegeven door $f(x) = \sqrt{4x - 5}$. De lijn *k* heeft als vergelijking $y = 4x + b$.
Voor een bepaalde waarde van *b* raakt de lijn *k* de grafiek van *f*. In onderstaande figuur zijn deze lijn *k* en de grafiek van *f* te zien.



Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van *b*.

5 (*naar CE havo wiskunde B1,2 2007-I*)

Gegeven is de functie *g*, gegeven door $g(x) = 5 - \sqrt{x^2 + 9}$.

De raaklijnen aan de grafiek van *g* in de snijpunten met de *x*-as snijden elkaar op de *y*-as.
Bereken de exacte coördinaten van dit snijpunt.

6 (*uit CE vwo wiskunde B1, 2005 – I*)

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}1x^2 + x$

De raaklijn in de oorsprong aan de grafiek van *f* gaat door een top van de grafiek van *f*.

a. Toon dit langs algebraïsche weg aan.

b. Bereken de coördinaten van het punt *P* op de grafiek van *f* waar de raaklijn evenwijdig is aan de raaklijn in de oorsprong.

7 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

Licht elk van de volgende onderdelen toe uitgaande van het punt (2,4) op de grafiek van f.

a. De grafiek van f wordt 3 omhoog getransleerd..
Daardoor ontstaat de grafiek van functie g. Verklaar waarom $g'(x) = f'(x)$.

b. De grafiek van f wordt nu 3 naar links getransleerd.
Daardoor ontstaat de grafiek van functie h. Verklaar waarom $h'(x) = f'(x+3)$

c. De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met 3 t.o.v. de *x*-as.
Daardoor ontstaat de grafiek van functie k. Verklaar waarom $k'(x) = 3 \cdot f'(x)$

d. De grafiek van f wordt vermenigvuldigd met 3 t.o.v. de *y*-as.
Daardoor ontstaat de grafiek van functie m. Verklaar waarom $m'(x) = \frac{1}{3} \cdot f'(\frac{1}{3}x)$

4. Algebraïsche vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de eisen wat betreft algebraïsche vaardigheden beschreven voor de examenkandidaten wiskunde havo en vwo, voor de programma's wiskunde C (alleen vwo), wiskunde A en wiskunde B. De syllabuscommissies vinden het nodig voor algebra de overeenkomsten en verschillen voor deze vakken zo duidelijk mogelijk te omschrijven. Enkele argumenten hiervoor zijn:

- docenten (en leerlingen) moeten een helder beeld hebben van de eisen die per vak worden gesteld aan het beheersen van algebraïsche vaardigheden,
- het vervolgonderwijs moet duidelijk worden gemaakt op welke vaardigheden mag worden gerekend, gegeven de beperkte tijd die beschikbaar is voor het wiskundeonderwijs.

In paragraaf 4.1 gaan we in op specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden en de rol die de rekenmachine hierbij speelt. In paragraaf 4.2 staat de lijst van specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden. Per programma, havo A, havo B, vwo C, vwo A en vwo B, is aangegeven welke vaardigheden van toepassing zijn. In paragraaf 4.3 geven we specifiek voor wiskunde B van de havo een aantal voorbeelden van de specifieke algebraïsche vaardigheden, die in sommige gevallen ontleend zijn aan 'oude' examenopgaven.
In de syllabi voor wiskunde A en B van het vwo is in bijlage 3 de lijst formules opgenomen zoals die bij het betreffende eindexamen wordt afgedrukt. Bij de eindexamens wiskunde voor havo A en B en voor vwo wiskunde C wordt geen lijst met formules afgedrukt.

4.1 Specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden

Algebraïsche vaardigheden zijn geen doel in zichzelf, maar onderdeel van wiskundige activiteiten. Door algebraïsche expressies te bewerken kunnen we bijvoorbeeld de juistheid van beweringen aantonen, kunnen we het rekenwerk vaak vereenvoudigen en kunnen we vergelijkingen zo herschrijven dat ze exact zijn op te lossen.
Om verder te verduidelijken wat van de examenkandidaten wordt verwacht maken we een onderscheid tussen specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.

Specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden
Bij *specifieke* algebraïsche vaardigheden gaat het om parate kennis en het vlot kunnen toepassen van de bijbehorende vaardigheden op de voorkomende algebraïsche expressies. Deze vaardigheden hebben betrekking op algoritmisch werken en algebraïsch rekenen. Het gaat hier bijvoorbeeld om kennis en gebruik van rekenregels, inclusief het werken met haakjes, bij het invullen van getallen of variabelen in een expressie en het gebruik van algoritmen om een vergelijking op te lossen.
Bij *algemene* algebraïsche vaardigheden spelen aspecten als aanpak, globale strategie, het herkennen van structuren en methoden, en doelgerichtheid een rol. Leerlingen moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, moeten kwalitatief kunnen redeneren aan de hand van een formule (zoals stijgen/dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag), moeten een formule kunnen opstellen door het generaliseren van getallenvoorbeelden of het combineren van bekende formules, moeten verbanden zien tussen de verschillende representaties van een functie en moeten kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en betekenis toekennen aan de variabelen en parameters. Bij deze algemene algebraïsche vaardigheden wordt een beroep gedaan op de denkactiviteiten zoals genoemd in het visiedocument van cTWO.
Samenvattend zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de examenkandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de examenkandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen.

Gebruik van de GR
Bij wiskunde C en wiskunde A is het gebruiken van wiskundig gereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen. Omdat in toepassingen veelal met benaderde waarden van grootheden wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet. Daar waar de nadruk ligt op globale, meestal kwalitatieve redeneringen wordt eventueel gebruik van de GR niet beloond via de normering.
Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook abstracte vraagstukken voorkomen waarvoor met behulp van algebra een exacte oplossing gevonden moet worden. Ook hier wordt eventueel gebruik van de GR niet beloond via de normering.

Per vak zullen de eisen met betrekking tot specifieke vaardigheden verschillen: bij wiskunde B zal het repertoire aan parate kennis en vaardigheden groter zijn dan bij wiskunde C of A. Ook het aantal denk- of rekenstappen om tot een oplossing te komen, zal bij wiskunde B groter kunnen zijn.
In de volgende voorbeelden proberen we deze verschillen tussen wiskunde A, B en C te illustreren.

Voorbeeldopgave 1 (vwo)

Wiskunde B: Gegeven is de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, waarbij I_0 een constante is.

Hoe verandert de waarde van G als I twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.

Wiskunde A: Het geluidsniveau G (in dB) is afhankelijk van de intensiteit I van het geluid (in W/m^2). Het verband wordt gegeven door de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a. Toon aan dat de formule te herschrijven is tot $G = 10 \cdot \log(I) + 120$.

Als I verdubbeld wordt, dan zal G (ongeveer) 3 groter worden.
b. Toon dit aan door de formules $G = 10 \cdot \log(2I) + 120$ en $G = 10 \cdot \log(I) + 120$ te vergelijken.

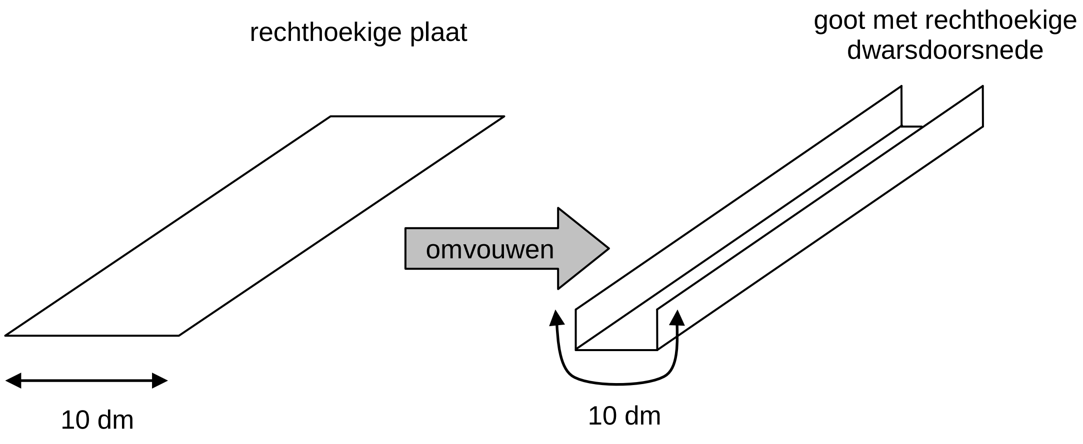
Wiskunde C: Het geluidsniveau G (in dB) is afhankelijk van de intensiteit I van het geluid (in W/m^2). Het verband wordt gegeven door de formule $G = 10 \cdot \log(I) + 120$.

Onderzoek door middel van getallenvoorbeelden hoe G verandert als I verdubbeld wordt.

Bij alle vakken (wiskunde A, B en C) kan ook een formule voor I uitgedrukt in G, gevraagd worden.

Voorbeeldopgave 2 (havo en vwo)

Van een lange rechthoekige plaat met een breedte van 10 dm wordt aan weerszijden een even brede rand omgevouwen zodat een goot ontstaat met een rechthoekige dwarsdoorsnede. Zie de tekening.



Wiskunde B:
a. Bereken hoe groot de oppervlakte van de dwarsdoorsnede maximaal kan zijn.
Voor de volgende vraag heeft de lange rechthoekige plaat een breedte van a (in dm).
b. Bereken hoe de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede afhangt van a.

Wiskunde A:

a. Toon aan dat de oppervlakte A van de dwarsdoorsnede gelijk is aan $A = 10x - 2x^2$ (x in dm en A in dm^2), waarbij x de hoogte is van de goot.
b. Bereken de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede. (eventueel: Bereken met behulp van de afgeleide de maximale oppervlakte)

Wiskunde C:
In de tabel hieronder zie je het verband tussen de hoogte x van de goot en de oppervlakte van de dwarsdoorsnede.

Hoogte x (in dm)	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	…..	
Oppervlakte (in dm^2)	8	9,12	10,08	10,88	11,52	12	12,32	…..	

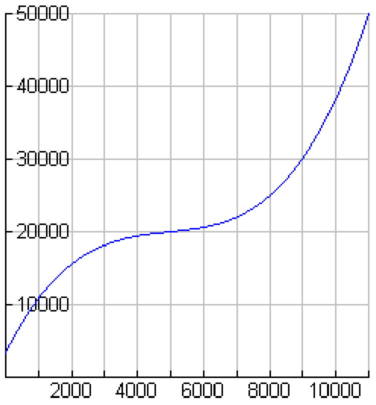
a. Bereken de oppervlakte bij een hoogte van $x = 2,6$.
b. Maak een formule voor de oppervlakte van de dwarsdoorsnede, uitgedrukt in x.
c. Onderzoek, met tabel of formule, bij welke hoogte de oppervlakte van de dwarsdoorsnede maximaal is.

Voorbeeldopgave 3 (havo)

In een bedrijf dat verpakkingen produceert wordt het verband tussen de totale kosten TK (in euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q gegeven door de functie

$TK = 0,00000012q^3 - 0,00177q^2 + 9,2q + 3250$.

Hiernaast zie je de grafiek van TK.



Wiskunde B:
a. Toon aan met behulp van de afgeleide dat TK stijgt tussen $q = 0$ en $q = 10\,000$.

De gemiddelde kosten GK worden berekend met de formule $GK = \frac{TK}{q}$.

b. Bereken GK voor $q = 10\,000$ met behulp van de formule en geef aan hoe je GK kunt aflezen uit de grafiek.
c. De formule voor GK is te herschrijven in de vorm $GK = a \cdot q^2 + b \cdot q + c + d \cdot q^{-1}$. Geef a, b, c en d.
d. Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van q de gemiddelde kosten minimaal zijn. Geef aan hoe je dit minimum uit de grafiek kunt aflezen.

Wiskunde A:

De gemiddelde kosten GK worden berekend met de formule $GK = \frac{TK}{q}$.

a. Bereken GK voor $q = 10\,000$ met behulp van de formule.
b. Bereken de minimale gemiddelde kosten. (*)

De formule van GK kan geschreven worden in de vorm: $GK = F + \frac{3250}{q}$ waarbij F een formule is die hoort bij een tweedegraads verband.
c. Geef de formule voor F.

(*) Leerlingen mogen dit dus met de GR bepalen

4.2 Algebraïsche vaardigheden, een overzicht

In het volgende overzicht hanteren we het in paragraaf 4.1 beschreven onderscheid in specifieke en algemene vaardigheden. De algebraïsche vaardigheden moeten in samenhang met het betreffende programma worden gelezen. De opsomming is indicatief.
Vervolgens worden in paragraaf 4.3 bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke specifieke vaardigheden van een kandidaat worden verwacht.
Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) reeds bekend verondersteld mag worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.
Op de plaats van A, B, C en D in vergelijkingen van de volgende tabel kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $ax+b$, $\frac{a}{x}$ en x^2.
Niet aan de orde komen de regels die horen bij het differentiëren.

De vaardigheden genoemd bij categorieën A t/m D moeten in beide richtingen kunnen worden uitgevoerd, tenzij anders is vermeld.
Beperkende voorwaarden zoals bijvoorbeeld: noemers van breuken zijn ongelijk 0, vormen onder worteltekens zijn groter dan of gelijk aan 0, zijn niet altijd vermeld.

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
A. **Breukvormen**	1. $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$	x	x	x	x	x
	3. $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}=\frac{A}{C}\cdot B=A\cdot B\cdot\frac{1}{C}$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{A}{\frac{B}{C}}=\frac{A\cdot C}{B}$	x	x	x	x	x
B. **Wortelvormen**	1. $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$ mits $A,B\geq 0$	x	x	x	x	x
	2. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ mits $A\geq 0\,,B>0$	x	x	x	x	x
C. **Bijzondere producten**	1. haakjes wegwerken en ontbinden in factoren: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	2. $(A+B)(C+D)=AB+AD+BC+BD$	x	x	x	x	x
	3. $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$		x			x
	4. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$		x			x
	5. kwadraat afsplitsen: x^2+px+q schrijven in de vorm $(x+r)^2+s$		x			x

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		**wiA**	**wiB**	**wiC**	**wiA**	**wiB**
D. Machten en logaritmen	1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	x	x	x	x	x
	3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	x	x	x	x	x
	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	x	x	x	x	x
	6. $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ met p positief en geheel		x	x	x	x
	7. ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$		x		x	x
	8. ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log(\frac{a}{b})$		x		x	x
	9. ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$		x		x	x
	10. ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ vwo C: alleen $p = 10$		x	x	x	x
	11. ${}^g\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$				x	x
E. Goniometrie	voor formules zie betreffende domein		x			x
F. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A tot en met D	1. via substitutie van getallen	x	x	x	x	x
	2. via substitutie van expressies	x	x	x	x	x
	3. via het omwerken van formules	x	x	x	x	x
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \; of \; B = 0$	x	x	x	x	x
	2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \; of \; B = C$ vwo C en havo A: $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \Rightarrow B = C$	x	x	x	x	x
	3. $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \; of \; A = -B$		x		x	x
	6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ mits $A, B \geq 0$	x	x	x	x	x

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
H. Vergelijkingen oplossen via algoritmen	1. eerstegraadsvergelijkingen $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$	x	x	x	x	x
	2. tweedegraadsvergelijkingen abc-formule $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$		x			x
	3. $x^n=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{n}}$ als n oneven is $x^n=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{n}}$ *of* $x=-c^{\frac{1}{n}}$ als n even is	x	x	x	x	x
	4. $g^x=a \Rightarrow x={}^{g}\log(a)$		x	x	x	x
	5. $e^x=a \Rightarrow x=\ln(a)$				x	x
	6. ${}^{g}\log(x)=b \Rightarrow x=g^b$		x	x	x	x
	7. $\ln(x)=b \Rightarrow x=e^b$				x	x
	8. $\lvert x\rvert=c \Rightarrow x=c$ *of* $x=-c$					x
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties	1. $f(A)=c$		x			x
	2. $f(A)=f(B)$		x			x
K. Vergelijkingen en ongelijkheden van het type $f(x)=g(x)$ resp. $f(x)\geq g(x)$ oplossen	1. grafisch, waaronder ICT	x	x	x	x	x
	2. exact, indien f en g lineair zijn	x	x	x	x	x
	3. vergelijkingen en ongelijkheden die niet vallen onder 2. exact, indien mogelijk		x		x	x

		havo		vwo		
Algemene vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
L. **Formules opstellen**	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfunctie					
	a. eerstegraads/lineaire functie	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfunctie		x		x	x
	c. exponentiële functie	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functie		x		x	x
	e. goniometrische functie		x		x	x
	f. machtsfunctie		x		x	x
	g. absolute waarde functie					x
	3. door generaliseren via getallenvoorbeelden	x	x	x	x	x
	4. door schakelen van formules	x	x	x	x	x
M. **Expressies herkennen**	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	a. eerstegraads/lineaire functies	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfuncties	x	x	x	x	x
	c. exponentiële functies	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functies		x	x	x	x
	e. goniometrische functies		x		x	x
	f. machtsfuncties	x	x	x	x	x
	2. structuur van een expressie vaststellen	x	x	x	x	x
	3. rol van een voorkomende parameter bepalen	x	x		x	x
N. **Karakteristieken bepalen**	kwalitatief redeneren over expressies of delen daarvan met betrekking tot karakteristieken als					
	a. uiterste waarden	x	x	x	x	x
	b. stijgen of dalen	x	x	x	x	x
	c. symmetrie		x		x	x
	d. asymptotisch gedrag	x	x	x	x	x
O. **Algebraïsche expressies reduceren en representeren**	1. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan	x	x		x	x
	2. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren		x			x
	3. flexibel verschillende representaties van functies (formule, tabel, grafiek) kunnen inzetten en tussen deze representaties kunnen wisselen	x	x	x	x	x

4.3 Voorbeeldvragen (specifieke en algemene) algebraïsche vaardigheden wiskunde B havo.

De eisen die aan de wiskunde B kandidaten worden gesteld ten aanzien van algebra zijn divers. Zo moet een kandidaat in staat zijn algebra te gebruiken bij het modelleren en oplossen van een in een context gesteld probleem, maar zal hij ook in staat moeten zijn om een meer abstracte opgave op te lossen of een algebraïsch bewijs te leveren.
Bij contextproblemen zal de GR vaker zinvol kunnen worden ingezet dan bij strikt wiskundige problemen, omdat in realistische probleemsituaties vaak met benaderende getallen (of aantallen) wordt gewerkt. De eis om een vraag met algebraïsch handelen te beantwoorden zal daarom ook expliciet zo worden geformuleerd.

Algebraïsche activiteit	(voorbeelden van specifieke vaardigheden)	zie opgave elders in syllabus
A. Breukvormen	1. $\frac{1}{4}-\frac{3}{7}$ als één breuk schrijven	
	2. $\frac{6}{\frac{4}{5}}=7\frac{1}{2}$ of $\frac{15}{2}$	
	3. $\frac{1}{x^3}+1=\frac{1+x^3}{x^3}$	
	4. $\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}=\frac{y+x}{x^2y^2}$	
	5. $\frac{2a^2b}{5c}\cdot\frac{10a^4b^{-1}}{2c}=\frac{2a^6}{c^2}$	
	6. $\frac{a}{\frac{ab}{a^2}}=\frac{a^3}{ab}=\frac{a^2}{b}$	
	7. $37{,}5\cdot\frac{\frac{960}{x}}{2}+180x=\frac{18000}{x}+180x$	
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A^2\cdot B}=\sqrt{A^2}\cdot\sqrt{B}=A\sqrt{B}\ (A\geq 0)$	
	2. $\sqrt{12}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$	
	3. $\sqrt{4x}+\sqrt{x}=3\sqrt{x}$	
	4. $\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{5}$ of $\frac{\sqrt{5}}{3}$	
	5. $\sqrt{\frac{4x^2}{7}}=\frac{2x}{\sqrt{7}}$ (of $\frac{2}{7}x\sqrt{7}$) $(x\geq 0)$	
C. Bijzondere producten	1. $(2x+\frac{1}{2})^2=4x^2+2x+\frac{1}{4}$	
	2. $x^2-8x+5=(x-4)^2-11$	
	$x^2-8x+5=(x-4)^2-11$	
D. Machten en logaritmen	1. $(a^{-5}b)(a^3bc)=a^{-2}b^2c=\frac{b^2c}{a^2}$	
	2. $2^{2x}=(2^x)^2$ of $2^{2x}=(2^2)^x=4^x$	

	3. $3^x = 5$ oplossen geeft $x = {}^3\log(5)$ en dan eventueel met de GR kunnen benaderen 4. $\frac{10c^{-3}}{100c^{-5}} = \frac{c^2}{10}$ 5. $1000 \cdot (0{,}1)^{0{,}05x} \rightarrow 1000 \cdot g^x$ met $g = \ldots$	
E. Goniometrie		Zie voorbeeldopgaven subdomein B4
F. 'Herleidingen' uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A-D	1. $\frac{x^2}{2x^2 - x^3}$ herleiden tot $\frac{1}{2-x}$ 2. kunnen verklaren waarom: $\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{x-y}\right) = -\frac{1}{y}$ 3. *a* uitdrukken in *b* als gegeven is: $\frac{4a}{a+b} = 10 - b$ 4. Substitueer $x = t - 1$ in $x^2 - 2x + 8$ en schrijf zonder haakjes. 5. Substitueer voor *t* de uitdrukking $\frac{u}{2} + 1$ en schrijf als som van machten van *u*: $\frac{4t^2}{2t-2}$ 6. De formule $\log W = 0{,}075N + 0{,}4$ met behulp van algebra omwerken tot $W = b \cdot g^N$ 7. Gegeven is $D = 6{,}9\sqrt{T - 12}$. Schrijf *T* als functie van *D*. 8. *CE havo wiskunde B1,2 2005-I vraag 21*: Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 27x + 44$. Een familie van functies is gegeven door $h(x) = (x+4)(p + 4x - x^2)$, waarbij *p* elk reëel getal kan voorstellen. Toon aan met behulp van algebra dat er een waarde van *p* is waarbij de bijbehorende functie *h* gelijk is aan de functie *f*. 9. *CE havo wiskunde B1,2 2004-I vraag 17:* Gegeven zijn de functies $f(x) = \log(4 - x)$ en $g(x) = 2 \cdot \log(x+2)$. Met domein $-2 < x < 4$ is de functie *h* gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$. Het functievoorschrift van *h* kan geschreven worden als	

	$h(x)=\log(16+12x-x^3)$. Toon dit algebraïsch aan.	
G, H, K en L		Zie voorbeeldopgaven subdomein B2
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaard-functies	1. $\sin(3x)-1=0$ algebraïsch oplossen 2. $10^{3x+5}=6$ algebraïsch oplossen 3. $2^{-x+1}=2^{2x}$ algebraïsch oplossen	

Bijlage 1

Examenprogramma Wiskunde B havo

Het eindexamen
Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.
Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A Vaardigheden
Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen
Domein C Meetkundige berekeningen
Domein D Toegepaste analyse 1

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C en D in combinatie met de vaardigheden uit domein A.
Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.
Het CvE maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft tenminste betrekking op domein A en
- domein D;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1. Algemene vaardigheden
1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden
2 De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden
3 De kandidaat beheerst de bij het eindexamenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.

Domein B: Functies, grafieken en vergelijkingen

Subdomein B1: Standaardfuncties
4 De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen en werken met eenvoudige transformaties.

Subdomein B2: Vergelijkingen en ongelijkheden
5 De kandidaat kan eenvoudige vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen, in voorkomende gevallen grafisch oplossen of de oplossingen numeriek benaderen en de oplossingen interpreteren in de context.

Subdomein B3: Evenredigheidsverbanden

6 De kandidaat kan verbanden tussen de twee grootheden *a* en *b* van de vorm $a = c \cdot b^d$ herkennen, toepassen en bijbehorende grafieken tekenen, vanuit de beschrijving van een dergelijk verband een formule opstellen, de evenredigheidsconstante bepalen en redeneren over het effect van schaalvergroting.

Subdomein B4: Periodieke functies
7 De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van sinus- of cosinusfuncties, de bijbehorende sinusoïden tekenen en de karakteristieke eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een eenvoudige goniometrische vergelijking op een gegeven interval bepalen.

Domein C: Meetkundige berekeningen

Subdomein C1: Afstanden en hoeken in concrete situaties
8 De kandidaat kan afstanden en hoeken berekenen met behulp van goniometrische verhoudingen, de stelling van Pythagoras en de sinus- en cosinusregel.

Subdomein C2: Analytische methoden
9 De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren aan de hand van gegeven contexten en figuren.

Subdomein C3: Vectorrekening
10 De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met vectoren in het platte vlak en het inwendig product van twee vectoren wiskundig en fysisch interpreteren.

Domein D: Toegepaste analyse 1

Subdomein D1: Veranderingen
11 De kandidaat kan het veranderingsgedrag van een functie, gegeven door grafiek, tabel of formule, beschrijven door middel van toenamediagrammen en differentiequotiënten en kan differentiequotiënten berekenen en interpreteren, ook vanuit een profielspecifieke probleemsituatie.

Subdomein D2: Afgeleide functies 1
12 De kandidaat kan de afgeleide functie begripsmatig interpreteren en kan lokale veranderingen van een functie benaderen zowel met een differentiaalquotiënt als numeriek-grafisch en kan de afgeleide functie van machtsfuncties met rationale exponenten bepalen.

Subdomein D3: Bepaling afgeleide functies
13 De kandidaat kan voor het bepalen van de afgeleide functie en de interpretatie daarvan binnen een context gebruik maken van de som-, verschil-, product-, quotiënt- en kettingregel.

Subdomein D4: Toepassing afgeleide functies
14 De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren gericht op onder meer optimaliseringsproblemen op meetkundige lichamen en figuren en op andere profielspecifieke contexten.

Bijlage 2

Voorbeeldexamenopgaven

De voorbeeldexamenopgaven worden omstreeks de herfstvakantie van 2010 gepubliceerd op cve.nl