College voor Examens

Werkversie
syllabus wiskunde A vwo 2011
bij het conceptexamenprogramma
van cTWO

Oktober 2010

Colofonpagina:

Syllabuscommissie wiskunde A, in opdracht van het College voor Examens

Bert Zwaneveld (Open Universiteit), voorzitter
Nico Alink (SLO), secretaris
Ger Limpens (Cito), toetsdeskundige
Henk Rozenhart (CvE), vaksectie wiskunde A
Marianne Lambriex (NVvW), docent
Grada Fokkens, pilotdocent
Piet Versnel, pilotdocent
Carel van de Giessen (cTWO)

Voorwoord

In het kader van de vernieuwing van het onderwijs in de bètavakken in havo en vwo heeft het ministerie van OCW aan cTWO, de vernieuwingscommissie voor wiskunde, onder meer gevraagd een advies uit te brengen over beproefde examenprogramma's. CTWO heeft daartoe experimentele examenprogramma's opgesteld, die met ingang van het schooljaar 2009/2010 in een pilot op een aantal scholen uitgevoerd worden. Het betreft concept examenprogramma’s die niet voor 2014 landelijk worden ingevoerd.

Ter ondersteuning van de voorbereiding op het centraal examen van deze pilot heeft het College voor Examens (CvE) drie syllabuscommissies ingesteld die de opdracht kregen voor elk examenprogramma een specificatie van de in het centraal examen te toetsen domeinen en subdomeinen te formuleren. De syllabi geven in detail aan wat gekend en gekund moet worden en als zodanig in het CE getoetst kan worden. Een syllabus geeft geen aanwijzingen ten aanzien van welke stof op welke manier onderwezen moet worden.

Deze syllabus heeft nog geen definitieve status. Hij dient de scholen die aan de examenexperimenten deelnemen voldoende houvast te bieden bij de pilot waar zij aan deelnemen. Om die reden draagt de syllabus de toevoeging *Werkversie*. De werkversies van de syllabi wiskunde zijn de basis voor de pilot waarin de haalbaarheid, onderwijsbaarheid en toetsbaarheid van de nieuwe examenprogramma’s worden onderzocht.

De werkversies van de syllabi wiskunde zijn ook nog niet compleet. Zo ontbreken de voorbeelden van toetsvragen nog, waarmee het karakter van de CE-bevraging bij de nieuwe examenprogramma’s wordt geïllustreerd. Op dit terrein moet nog werk worden verzet. Het ligt in de bedoeling deze onderdelen in oktober 2010 (havo) en januari 2011 (vwo) aan de werkversies van de syllabi toe te voegen.

Ruth Welman
Plv. clustermanager College voor Examens

Inhoudsopgave

1. Inleiding

Deze werkversie syllabus geeft informatie ten behoeve van de voorbereiding op het centraal examen vwo wiskunde A, met name nadere specificatie van de globale eindtermen van dat deel van het experimentele examenprogramma dat centraal getoetst wordt.
De specificaties voor vwo wiskunde A in deze werkversie syllabus zijn opgesteld door de syllabuscommissie wiskunde A. Bij deze specificaties zijn voorbeeldopgaven opgenomen ter verduidelijking. Deze opgaven geven een indicatie van het niveau waarop het programma getoetst kan worden. In het betreffende hoofdstuk 5 wordt daar nader op ingegaan.
De syllabuscommissie heeft bij het opstellen van deze specificaties de uitgangspunten van cTWO en de uitvoerbaarheid van het programma als leidraad genomen. Afstemming met de syllabuscommissies voor wiskunde B en C heeft waar mogelijk plaatsgevonden. De specificaties zijn, daar waar mogelijk en naar het inzicht van de syllabuscommissie wenselijk, onderling in overeenstemming gebracht met de ander wiskundevakken, A en B voor havo, B en C voor vwo.

De vernieuwingscommissie cTWO heeft een aantal uitgangspunten geformuleerd voor het examenprogramma vwo wiskunde A.

- De *doelgroep* van vwo wiskunde A wordt gevormd door leerlingen die het profiel EM of het profiel NG kiezen. Leerlingen met het profiel CM kunnen wiskunde A kiezen, mits de school dat aanbiedt.
- Wiskunde A bereidt voor op *vervolgopleidingen* van het wo in de sociale, economische en biomedische richtingen.
- De *inhoud* van wiskunde A is niet alleen van belang voor vervolgopleidingen (denk aan functies of statistiek en de bijbehorende algebraïsche en rekenvaardigheden), maar dient ook een meer algemeen doel (denk aan redeneren, argumenteren en kritisch reflecteren).
- Wiskunde A heeft een meer *algemeen vormende waarde* door de leerlingen voor te bereiden op de (informatie)maatschappij en hen te leren in verschillende situaties wiskundige aspecten te herkennen, te interpreteren en te gebruiken. Voor de leerlingen is het van belang zicht te ontwikkelen op de rol van wiskunde in de maatschappij. Daarnaast dienen zij de mogelijkheden van wiskundige toepassingen op waarde te leren schatten. Bij wiskunde A wordt dan ook veel aandacht besteed aan toepassingen.

De leerlingen van de wiskundevakken zetten 'hun' wiskunde in om problemen te analyseren en op te lossen. De verschillen tussen de vakken zitten enerzijds in het type problemen en anderzijds in de mate waarin zij zelfstandig 'hun' wiskunde moeten inzetten.
Bij wiskunde B kunnen de problemen zowel in een wiskundige als niet-wiskundige probleemsituatie gesitueerd zijn. Bij wiskunde A en C zijn de problemen altijd in een niet-wiskundige probleemsituatie gesitueerd.
Bij het oplossen van problemen wordt bij wiskunde B een grotere mate van zelfstandigheid van de leerlingen verlangd dan bij wiskunde A, terwijl dat bij wiskunde A weer groter is dan bij wiskunde C. Dat kan bijvoorbeeld door tussenstappen op te nemen in de examenopgaven.

De syllabuscommissie heeft vervolgens als uitgangspunt gehanteerd dat op het centraal examen de opgaven steeds een probleemsituatie aanbieden waarover vragen worden gesteld die betrekking hebben op die situatie en waarbij de kandidaten hun wiskundige kennis en vaardigheden moeten laten zien. Daarbij spelen algebraïsche vaardigheden en rekenvaardigheden een niet onbelangrijke rol. Globaal gesproken moeten de kandidaten bij wiskunde B zelf bij een probleemsituatie de wiskundige formule(s) opstellen binnen het gespecificeerde programma, terwijl de kandidaten bij wiskunde A via tussenstappen daartoe gebracht worden. Vaak zal bij wiskunde A de formule die de probleemsituatie beschrijft, gegeven zijn, tenzij het om verbanden gaat zoals die genoemd worden in de specificaties 6.2 en 7.3 van het examenprogramma. Ook bij wiskunde C zal de formule vaak gegeven zijn maar daar zal de nadruk liggen op het begrijpen van gehanteerde wiskundige technieken in de probleemsituatie.
Ten overvloede merken we nog op dat het examenprogramma van wiskunde C de domeinen Logisch Redeneren en Vorm en Ruimte bevat. Deze domeinen ontbreken in het examenprogramma van wiskunde A.

In deze syllabus treft u aan

- nadere informatie over het centraal examen (hoofdstuk 2);
- de specificaties van de globale eindtermen die in het centraal examen getoetst dienen te worden (hoofdstuk 3);

- een hoofdstuk over algebraïsche vaardigheden, met voorbeelden (hoofdstuk 4);
- voorbeeldopgaven, behorende bij de subdomeinen van het centraal examen, met correctievoorschrift (hoofdstuk 5);
- het experimentele examenprogramma voor vwo wiskunde A (bijlage 1);
- lijst van formules die in het examen wordt opgenomen (bijlage 2);
- voorbeeldeindexamenopgaven met correctievoorschrift (bijlage 3) **PM**.

2. Nadere informatie over het examen vwo wiskunde A

2.1 Verdeling van de examenstof

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C en D in combinatie met de vaardigheden uit domein A.
Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft tenminste betrekking op domein A en
- domeinen E en F;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De toetsing van toepassingsgerichte vaardigheden (onderzoeken, modelleren, ICT-gebruik) is met name gesitueerd binnen het SE en kan profiel- en pakketspecifiek zijn.

In schema:

Domein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	X	X	
B Algebra en tellen	X		X
C Verbanden	X		X
D Verandering	X		X
E Statistiek en kansrekening		X	
F Keuzeonderwerpen		X	

Een globale formulering van eindtermen van alle subdomeinen (het examenprogramma) staat in bijlage 1.

Van de (sub)domeinen die in het centraal examen worden getoetst staat een gedetailleerdere beschrijving in hoofdstuk 3.

2.2 Hulpmiddelen
Bij het centraal schriftelijk eindexamen mogen de kandidaten gebruik maken van een grafische rekenmachine. Door het CvE wordt jaarlijks een lijst van toegestane grafische rekenmachines gepubliceerd.

2.3 Vakspecifieke regels correctievoorschrift

significantie
Er wordt van de kandidaten niet verlangd dat zij kennis hebben van de regels voor het aantal significante cijfers. Daarom wordt bij de vragen van het centraal examen aangegeven in welke nauwkeurigheid het antwoord dient te worden gegeven of er wordt genoegen genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.

basiskennis
Het examenprogramma bouwt voort op de veronderstelde basiskennis van de onderbouw vwo.

ICT
In het centraal examen wordt met ICT de grafische rekenmachine bedoeld.

3. Specificaties van het programma van het Centraal Examen

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan:

1.1 doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken.
1.2 adequaat schriftelijk, mondeling en digitaal communiceren over onderwerpen uit de wiskunde.
1.3 bij het verwerven van vakkennis en vakvaardigheden reflecteren op eigen belangstelling, motivatie en leerproces.
1.4 toepassingen en effecten van wiskunde in het dagelijks leven en in verschillende vervolgopleidingen en beroepssituaties herkennen en benoemen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

2 De kandidaat kan een probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

De kandidaat kan

2.1 een probleemsituatie in een context interpreteren, analyseren, structureren en vertalen naar een model waarin wiskundig gereedschap kan worden ingezet.
2.2 wiskundige modellen toepassen op probleemsituaties, de resultaten van een wiskundige handeling terugvertalen naar de context en daaruit conclusies trekken of generaliseren.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

3 De kandidaat beheerst de bij het eindexamenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.

De kandidaat

3.1 beheerst de regels van de rekenkunde en algebra zonder ICT.
3.2 kan waar nodig ICT inzetten om omvangrijke of rekenintensieve problemen aan te pakken.
3.3 kan de correctheid van redeneringen verifiëren.
3.4 heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren.
3.5 kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op wiskundige juistheid.
3.6 kan op basis van een gegeven probleemsituatie een schatting maken van de uitkomst zonder deze uitkomst exact te berekenen.

Domein B: Algebra en tellen (60 slu)

Subdomein B1: Algebra

4 De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen, daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen en van het werken met haakjes, en beargumenteren waarom de gekozen aanpak werkt.

De kandidaat kan

4.1 berekeningen maken met en zonder variabelen waarbij gebruik gemaakt wordt van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels.
4.2 berekeningen maken met verhoudingen en breuken met daarin al dan niet een of meer variabelen.
4.3 rekenregels gebruiken om algebraïsche expressies te herschrijven of te verifiëren.
4.4 gebruik maken van de begrippen absoluut en relatief.
4.5 werken met grootheden, samengestelde grootheden en maatsystemen, en maateenheden omrekenen.

Subdomein B2: Telproblemen

5 De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij

berekeningen en redeneringen.

De kandidaat kan
5.1 telproblemen structureren en schematiseren met behulp van bijvoorbeeld boomdiagram, wegendiagram of rooster.
5.2 gebruik maken van permutaties en combinaties.

Domein C: Verbanden (140 slu)

Subdomein C1: Functies

6 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, goniometrische functies, exponentiële functies en logaritmische functies de kenmerken in grafiek, tabel en formule herkennen en gebruiken.

De kandidaat kan
6.1 binnen de context de verschillende representaties van een functie (formule, verband, tabel, grafiek) doelgericht gebruiken.
6.2 de functies $f(x)=ax+b$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(x)=a\cdot x^n$ (n rationaal), $f(x)=\sin x$, $f(x)=b\cdot g^x$ (ook $f(x)=b\cdot e^x$), en $f(x)={}^g\log x$ (ook $f(x)=\ln x$) en hun grafieken herkennen en gebruiken met hun specifieke eigenschappen.

Subdomein C2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7 De kandidaat kan formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met algebraïsche methoden zonder gebruik van ICT, en daar waar nodig met numerieke of grafische methoden met inzet van ICT, en de uitkomst interpreteren in termen van de context.

De kandidaat kan
7.1 formules van functies zoals omschreven in 6.2 opstellen die passen bij de context.
7.2 op grafieken van functies zoals omschreven in 6.2 transformaties, zoals verschuiven of herschalen, uitvoeren en daarbij het bijbehorende functievoorschrift opstellen.
7.3 verbanden van de vorm $y=a\cdot x$ (evenredigheid) en van de vorm $y=\frac{a}{x}$ (omgekeerd evenredigheid) herkennen en gebruiken.
7.4 bij verbanden van de vorm $y=f(x)$ met $f(x)=ax+b$ of $f(x)=a\cdot x^n$ de variabele x uitdrukken in y.
7.5 vergelijkingen oplossen met behulp van numerieke of grafische methoden en lineaire vergelijkingen en vergelijkingen van de vorm $a\cdot x^n+b=c$ ook oplossen met behulp van algebraïsche methoden.
7.6 ongelijkheden oplossen.
7.7 functies maken door twee functies op te tellen ($f(x)+g(x)$), af te trekken ($f(x)-g(x)$), te vermenigvuldigen ($f(x)\cdot g(x)$) of samen te stellen ($g(f(x))$).
7.8 rekenregels van logaritme gebruiken.
7.9 een logaritmische schaalverdeling gebruiken.
7.10 op basis van verbanden met meerdere variabelen kwalitatief redeneren.

Domein D: Verandering (120 slu)

Subdomein D1: Rijen

8 De kandidaat kan het gedrag van een rij herkennen, beschrijven en er berekeningen mee uitvoeren, in het bijzonder in het geval van rekenkundige en meetkundige rijen.

De kandidaat kan
8.1 vaststellen of een rij getallen een rekenkundige of meetkundige rij vormt.
8.2 eigenschappen van de rij van verschillen van een rekenkundige en een meetkundige rij beschrijven en gebruiken.
8.3 bij een rij getallen het begrip somrij gebruiken en daarbij het Σ-teken gebruiken.

8.4 bij een rij getallen zowel met een recursief voorschrift als met een directe formule werken.
8.5 binnen een probleemsituatie een recursieve formule herkennen, opstellen en deze doorrekenen.

Subdomein D2: Helling

9 De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken of functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met de probleemsituatie.

De kandidaat kan

9.1 bij een grafiek of functie een toenamediagram tekenen en binnen de context een relatie leggen tussen toenamediagram en grafiek of functie.
9.2 de gemiddelde verandering berekenen van een grafiek op een interval en de uitkomst interpreteren in de context.
9.3 vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is.
9.4 het veranderingsgedrag van een functie in de probleemsituatie interpreteren.
9.5 de helling van een grafiek in een punt berekenen en binnen de context interpreteren en toepassen.

Subdomein D3: Afgeleide

10 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de afgeleide bepalen, de rekenregels voor het differentiëren gebruiken en aan de hand van de afgeleide het veranderingsgedrag van een functie bestuderen.

De kandidaat kan

10.1 de afgeleide berekenen van de functies $f(x)=ax+b$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(x)=a\cdot x^n$ (n rationaal), $f(x)=b\cdot g^x$ (ook $f(x)=b\cdot e^x$), en $f(x)={}^g\log x$ (ook $f(x)=\ln x$).
10.2 diverse notaties van de afgeleide herkennen en gebruiken.
10.3 gebruik maken van de somregel, verschilregel, productregel, quotiëntregel en kettingregel voor het differentiëren van functies van de vorm $g(f(x))$, waarbij f en g van de vorm zijn zoals beschreven in 10.1.
10.4 een verband leggen tussen de afgeleide van een functie en de raaklijn aan de grafiek van die functie in een gegeven punt op de grafiek.
10.5 de afgeleide gebruiken om extremen van een functie te vinden en te controleren.
10.6 een optimaliseringsprobleem in context oplossen door differentiëren.
10.7 binnen een probleemsituatie betekenis geven aan de afgeleide en ermee redeneren.

4. Algebraïsche vaardigheden

In dit hoofdstuk worden de eisen wat betreft algebraïsche vaardigheden beschreven voor de examenkandidaten wiskunde havo en vwo, voor de programma's wiskunde C (alleen vwo), wiskunde A en wiskunde B. De syllabuscommissies vinden het nodig voor algebra de overeenkomsten en verschillen voor deze vakken zo duidelijk mogelijk te omschrijven. Enkele argumenten hiervoor zijn:

- docenten (en leerlingen) moeten een helder beeld hebben van de eisen die per vak worden gesteld aan het beheersen van algebraïsche vaardigheden,
- het vervolgonderwijs moet duidelijk worden gemaakt op welke vaardigheden mag worden gerekend, gegeven de beperkte tijd die beschikbaar is voor het wiskundeonderwijs.

In paragraaf 4.1 gaan we in op specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden en de rol die de rekenmachine hierbij speelt. In paragraaf 4.2 staat de lijst van specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden. Per programma, havo A, havo B, vwo C, vwo A en vwo B, is aangegeven welke vaardigheden van toepassing zijn. In paragraaf 4.3 geven we specifiek voor wiskunde A van het vwo een aantal voorbeelden van de specifieke algebraïsche vaardigheden die in sommige gevallen ontleend zijn aan opgaven in deze syllabus of aan 'oude' examenopgaven.
In de syllabi voor wiskunde A en B van het vwo is in bijlage 2 de lijst formules opgenomen zoals die bij het betreffende eindexamen wordt afgedrukt. Bij de eindexamens wiskunde voor havo A en B en voor vwo wiskunde C wordt geen lijst met formules afgedrukt.

4.1 Specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden

Algebraïsche vaardigheden zijn geen doel in zichzelf, maar onderdeel van wiskundige activiteiten. Door algebraïsche expressies te bewerken kunnen we bijvoorbeeld de juistheid van beweringen aantonen, kunnen we het rekenwerk vaak vereenvoudigen en kunnen we vergelijkingen zo herschrijven dat ze exact zijn op te lossen.
Om verder te verduidelijken wat van de examenkandidaten wordt verwacht maken we een onderscheid tussen specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.

Specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden
Bij *specifieke* algebraïsche vaardigheden gaat het om parate kennis en het vlot kunnen toepassen van de bijbehorende vaardigheden op de voorkomende algebraïsche expressies. Deze vaardigheden hebben betrekking op algoritmisch werken en algebraïsch rekenen. Het gaat hier bijvoorbeeld om kennis en gebruik van rekenregels, inclusief het werken met haakjes, bij het invullen van getallen of variabelen in een expressie en het gebruik van algoritmen om een vergelijking op te lossen.
Bij *algemene* algebraïsche vaardigheden spelen aspecten als aanpak, globale strategie, het herkennen van structuren en methoden, en doelgerichtheid een rol. Leerlingen moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, moeten kwalitatief kunnen redeneren aan de hand van een formule (zoals stijgen/dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag), moeten een formule kunnen opstellen door het generaliseren van getallenvoorbeelden of het combineren van bekende formules, moeten verbanden zien tussen de verschillende representaties van een functie en moeten kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en betekenis toekennen aan de variabelen en parameters. Bij deze algemene algebraïsche vaardigheden wordt een beroep gedaan op de denkactiviteiten zoals genoemd in het visiedocument van cTWO.
Samenvattend zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de examenkandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de examenkandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen.

Gebruik van de GR
Bij wiskunde C en wiskunde A is het gebruiken van wiskundig gereedschap bedoeld om contextproblemen mee te analyseren en op te lossen. Omdat in toepassingen veelal met benaderde waarden van grootheden wordt gewerkt, ligt het niet voor de hand om exacte antwoorden te eisen. In veel gevallen zal de GR daarbij zinvol kunnen worden ingezet. Daar waar de nadruk ligt op globale, meestal kwalitatieve redeneringen wordt eventueel gebruik van de GR niet beloond via de normering.
Bij wiskunde B daarentegen zullen zeker ook exacte wiskundige modellen voorkomen die met behulp van algebra moeten worden opgelost. Ook hier wordt eventueel gebruik van de GR niet beloond via de normering.

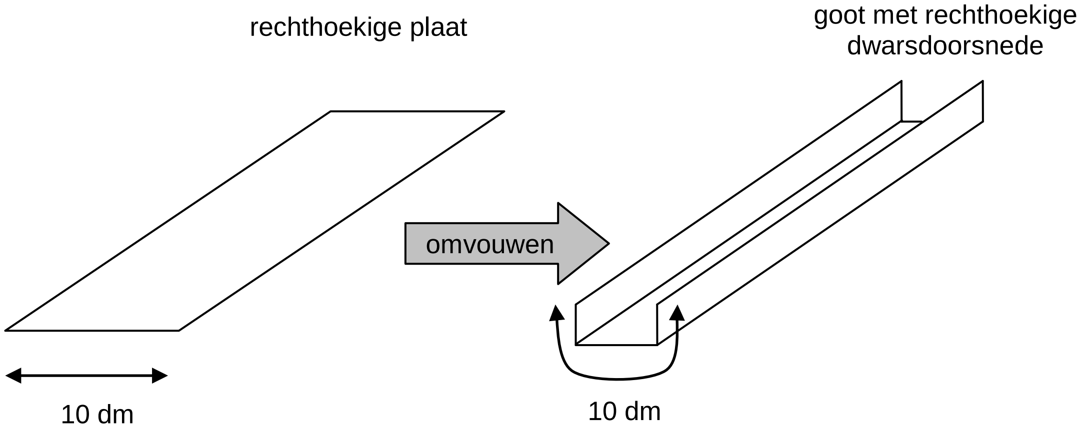
Per vak zullen de eisen met betrekking tot specifieke vaardigheden verschillen: bij wiskunde B zal het repertoire aan parate kennis en vaardigheden groter zijn dan bij wiskunde C of A. Ook het aantal denk- of rekenstappen om tot een oplossing te komen, zal bij wiskunde B groter kunnen zijn.

In de volgende voorbeelden proberen we deze verschillen tussen wiskunde A, B en C te illustreren.

Voorbeeldopgave 1 (vwo)
Wiskunde B: Gegeven is de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, waarbij I_0 een constante is. Hoe verandert de waarde van G als I twee keer zo groot wordt? Bewijs je uitspraak.
Wiskunde A: Het geluidsniveau G (in dB) is afhankelijk van de intensiteit I van het geluid (in W/m^2). Het verband wordt gegeven door de formule $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$. a. Toon aan dat de formule te herschrijven is tot $G = 10 \cdot \log(I) + 120$. Als I verdubbeld wordt, dan zal G (ongeveer) 3 groter worden. b. Toon dit aan door de formules $G = 10 \cdot \log(2I) + 120$ en $G = 10 \cdot \log(I) + 120$ te vergelijken.
Wiskunde C: Het geluidsniveau G (in dB) is afhankelijk van de intensiteit I van het geluid (in W/m^2). Het verband wordt gegeven door de formule $G = 10 \cdot \log(I) + 120$. Onderzoek door middel van getallenvoorbeelden hoe G verandert als I verdubbeld wordt.
Bij alle vakken (wiskunde A, B en C) kan ook een formule voor I uitgedrukt in G, gevraagd worden.

Voorbeeldopgave 2 (havo en vwo)

Van een lange rechthoekige plaat met een breedte van 10 dm wordt aan weerszijden een even brede rand omgevouwen zodat een goot ontstaat met een rechthoekige dwarsdoorsnede. Zie de tekening.



Wiskunde B:
a. Bereken hoe groot de oppervlakte van de dwarsdoorsnede maximaal kan zijn.
Voor de volgende vraag heeft de lange rechthoekige plaat een breedte van a (in dm).
b. Bereken hoe de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede afhangt van a.

Wiskunde A:
a. Toon aan dat de oppervlakte A van de dwarsdoorsnede gelijk is aan $A = 10x - 2x^2$ (x in dm en A in dm^2), waarbij x de hoogte is van de goot.
b. Bereken de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede. (eventueel: Bereken met behulp van de afgeleide de maximale oppervlakte)

Wiskunde C:
In de tabel hieronder zie je het verband tussen de hoogte x van de goot en de oppervlakte van de dwarsdoorsnede.

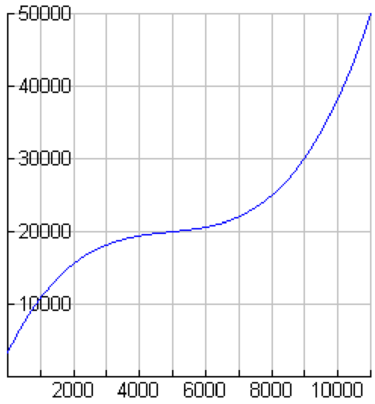
Hoogte x (in dm)	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	…..

Oppervlakte (in dm^2)	8	9,12	10,08	10,88	11,52	12	12,32	…..	

a. Bereken de oppervlakte bij een hoogte van $x = 2{,}6$.
b. Maak een formule voor de oppervlakte van de dwarsdoorsnede, uitgedrukt in x.
c. Onderzoek, met tabel of formule, bij welke hoogte de oppervlakte van de dwarsdoorsnede maximaal is.

Voorbeeldopgave 3 (havo)

In een bedrijf dat verpakkingen produceert wordt het verband tussen de totale kosten TK (in euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q gegeven door de functie $TK = 0{,}00000012q^3 - 0{,}00177q^2 + 9{,}2q + 3250$.
Hiernaast zie je de grafiek van TK.



Wiskunde B:

a. Toon aan met behulp van de afgeleide dat TK stijgt tussen $q = 0$ en $q = 10\,000$.

De gemiddelde kosten GK worden berekend met de formule $GK = \dfrac{TK}{q}$.

b. Bereken GK voor $q = 10\,000$ met behulp van de formule en geef aan hoe je GK kunt aflezen uit de grafiek.
c. De formule voor GK is te herschrijven in de vorm $GK = a \cdot q^2 + b \cdot q + c + d \cdot q^{-1}$. Geef a, b, c en d.
d. Bereken met behulp van de afgeleide voor welke waarde van q de gemiddelde kosten minimaal zijn. Geef aan hoe je dit minimum uit de grafiek kunt aflezen.

Wiskunde A:

De gemiddelde kosten GK worden berekend met de formule $GK = \dfrac{TK}{q}$.

a. Bereken GK voor $q = 10\,000$ met behulp van de formule.
b. Bereken de minimale gemiddelde kosten. (*)

De formule van GK kan geschreven worden in de vorm: $GK = F + \dfrac{3250}{q}$ waarbij F een formule is die hoort bij een tweedegraads verband.

c. Geef de formule voor F.

(*) Leerlingen mogen dit dus met de GR bepalen

4.2 Algebraïsche vaardigheden, een overzicht

In het volgende overzicht hanteren we het in paragraaf 4.1 beschreven onderscheid in specifieke en algemene vaardigheden. De algebraïsche vaardigheden moeten in samenhang met het betreffende programma worden gelezen. De opsomming is indicatief.
Vervolgens worden in paragraaf 4.3 bij een aantal categorieën korte voorbeelden gegeven waaruit valt af te lezen welke specifieke vaardigheden van een kandidaat worden verwacht.
Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) reeds bekend verondersteld mag worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.
Op de plaats van A, B, C en D in de volgende tabel kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $ax+b$, $\frac{a}{x}$ en x^2.
Niet aan de orde komen de regels die horen bij het differentiëren.

De vaardigheden genoemd bij categorieën A t/m D moeten in beide richtingen kunnen worden uitgevoerd, tenzij anders is vermeld.
Beperkende voorwaarden zoals bijvoorbeeld: noemers van breuken zijn ongelijk 0, vormen onder worteltekens zijn groter dan of gelijk aan 0, zijn niet altijd vermeld.

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
A. Breukvormen	1. $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$	x	x	x	x	x
	3. $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}=\frac{A}{C}\cdot B=A\cdot B\cdot\frac{1}{C}$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{A}{\frac{B}{C}}=\frac{A\cdot C}{B}$	x	x	x	x	x
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$ mits $A, B\geq 0$	x	x	x	x	x
	2. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ mits $A\geq 0$, $B>0$	x	x	x	x	x
C. Bijzondere producten	1. haakjes wegwerken en ontbinden in factoren: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	2. $(A+B)(C+D)=AB+AD+BC+BD$	x	x	x	x	x
	3. $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$		x			x
	4. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$		x			x
	5. kwadraat afsplitsen: x^2+px+q schrijven in de vorm $(x+r)^2+s$		x			x

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
D. Machten en logaritmen	1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	x	x	x	x	x
	3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	x	x	x	x	x
	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	x	x	x	x	x
	6. $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ met p positief en geheel		x	x	x	x
	7. ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$		x		x	x
	8. ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log(\frac{a}{b})$		x		x	x
	9. ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$		x		x	x
	10. ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$ vwo C: alleen $p = 10$		x	x	x	x
	11. ${}^g\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$				x	x
E. Goniometrie	voor formules zie betreffende domein		x			x
F. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A tot en met D	1. via substitutie van getallen	x	x	x	x	x
	2. via substitutie van expressies	x	x	x	x	x
	3. via het omwerken van formules	x	x	x	x	x
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen	1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = 0$	x	x	x	x	x
	2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \text{ of } B = C$ vwo C en havo A: $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \Rightarrow B = C$	x	x	x	x	x
	3. $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \text{ of } A = -B$		x		x	x
	6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ mits $A, B \geq 0$	x	x	x	x	x

		havo		vwo		
Specifieke vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
H. Vergelijkingen oplossen via algoritmen	1. eerstegraadsvergelijkingen $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$	x	x	x	x	x
	2. tweedegraadsvergelijkingen abc-formule $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$		x			x
	3. $x^n=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{n}}$ als n oneven is	x	x	x	x	x
	$x^n=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{n}}\ of\ x=-c^{\frac{1}{n}}$ als n even is	x	x	x	x	x
	4. $g^x=a \Rightarrow x={}^g\log(a)$		x	x	x	x
	5. $e^x=a \Rightarrow x=\ln(a)$				x	x
	6. ${}^g\log(x)=b \Rightarrow x=g^b$		x	x	x	x
	7. $\ln(x)=b \Rightarrow x=e^b$				x	x
	8. $\lvert x\rvert=c \Rightarrow x=c\ of\ x=-c$					x
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties	1. $f(A)=c$		x			x
	2. $f(A)=f(B)$		x			x
K. Vergelijkingen en ongelijkheden van het type $f(x)=g(x)$ resp. $f(x)\geq g(x)$ oplossen	1. grafisch, waaronder ICT	x	x	x	x	x
	2. exact, indien f en g lineair zijn	x	x	x	x	x
	3. vergelijkingen en ongelijkheden die niet vallen onder 2. exact, indien mogelijk		x		x	x

		havo		vwo		
Algemene vaardigheden		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
L. **Formules opstellen**	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfunctie					
	a. eerstegraads/lineaire functie	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfunctie		x		x	x
	c. exponentiële functie	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functie		x		x	x
	e. goniometrische functie		x		x	x
	f. machtsfunctie		x		x	x
	g. absolute waarde functie					x
	3. door generaliseren via getallenvoorbeelden	x	x	x	x	x
	4. door schakelen van formules	x	x	x	x	x
M. **Expressies herkennen**	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	a. eerstegraads/lineaire functies	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfuncties	x	x	x	x	x
	c. exponentiële functies	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functies		x	x	x	x
	e. goniometrische functies		x		x	x
	f. machtsfuncties	x	x	x	x	x
	2. structuur van een expressie vaststellen	x	x	x	x	x
	3. rol van een voorkomende parameter bepalen	x	x		x	x
N. **Karakteristieken bepalen**	kwalitatief redeneren over expressies of delen daarvan met betrekking tot karakteristieken als					
	a. uiterste waarden	x	x	x	x	x
	b. stijgen of dalen	x	x	x	x	x
	c. symmetrie		x		x	x
	d. asymptotisch gedrag	x	x	x	x	x
O. **Algebraïsche expressies reduceren en representeren**	1. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan	x	x		x	x
	2. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren		x			x
	3. flexibel verschillende representaties van functies (formule, tabel, grafiek) kunnen inzetten en tussen deze representaties kunnen wisselen	x	x	x	x	x

4.3 Voorbeeldvragen (specifieke en algemene) algebraïsche vaardigheden wiskunde A vwo.

Hieronder worden voorbeeldvragen genoemd om de algebraïsche vaardigheden te illustreren. Deze vaardigheden worden binnen een context getoetst. Een aantal van deze voorbeelden is afkomstig uit de voorbeeldopgaven uit hoofdstuk 5, aangevuld met onder andere enkele voorbeelden uit de syllabus 2010.
De opsomming hieronder is indicatief en gekoppeld aan de indeling van de vaardigheden in de vorige paragraaf.
Sommige voorbeelden komen bij meerdere categorieën voor, zij spelen in op meerdere vaardigheden.

A. Breukvormen

1. Ontleend aan opgave D (Verhoudingen) van hoofdstuk 5, vraag 6.

Gegeven is de formule van Petrov voor de appreciatiewaarde $A=\left(\frac{1}{v}-1\right)\cdot\log\left(1-\frac{1}{v}\right)$.

Hieronder staan drie mogelijkheden voor een andere schrijfwijze voor deze formule. Slechts één van de drie komt overeen met de formule die hierboven vermeld wordt.

A. $A=\frac{v-1}{v}\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$

B. $A=\frac{1-v}{v}\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$

C. $A=\frac{v}{v-1}\cdot\log\left(\frac{v-1}{v}\right)$

Welke van deze formules komt overeen met de formule van Petrov? Licht je antwoord toe.

2. Ontleend aan opgave E (Tanken) van hoofdstuk 5, vraag 3.

De juistheid van de formule $V=0,08\cdot N-\frac{25\cdot B}{312,5-x}$ aantonen op basis van een aantal veronderstellingen.

3. Ontleend aan opgave E (Tanken) van hoofdstuk 5, vraag 5.

De vergelijking $0,08\cdot N-\frac{25\cdot B}{312,5-x}=0$ herleiden tot $x=312,5\cdot\left(1-\frac{B}{N}\right)$.

4. Herleid $37,5\cdot\frac{\frac{960}{x}}{2}+180x$ tot $\frac{18000}{x}+180x$.

5. Herleid $\frac{2q^2-8q+16}{q}$ tot $2q-8+\frac{16}{q}$.

6. Herleid $\frac{60v}{k+\frac{v^2}{2a}}$ tot $\frac{120av}{2ak+v^2}$.

B. Wortelvormen

1. Laat zien dat uit $\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}-3=0$ volgt dat $t=2\frac{1}{4}$.

2. Gegeven is $D=6,9\sqrt{T-12}$. Druk T uit in D.

C. Bijzondere producten

1. Ontleend aan opgave A (Groenbelegging) van hoofdstuk 5, vraag 4.

Gegeven zijn de formules $L=0,75\cdot t$, $D=0,0042\cdot t+0,072$ en $M=0,16\cdot D^2\cdot L$.

M kan worden geschreven in de vorm $M=a\cdot t^3+b\cdot t^2+c\cdot t$. Bereken a, b en c.

2. Ontleend aan opgave E (Tanken) van hoofdstuk 5, vraag 5.

De vergelijking $0,08\cdot N-\frac{25\cdot B}{312,5-x}=0$ herleiden tot $x=312,5\cdot(1-\frac{B}{N})$.

D. Machten en logaritmen

1. Ontleend aan opgave D (Verhoudingen) van hoofdstuk 5, vraag 6.

Gegeven is de formule van Petrov voor de appreciatiewaarde $A=\left(\frac{1}{v}-1\right)\cdot\log\left(1-\frac{1}{v}\right)$. Hieronder staan drie mogelijkheden voor een andere schrijfwijze voor deze formule. Slechts één van de drie komt overeen met de formule die hierboven vermeld wordt. A. $A=\frac{v-1}{v}\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$ B. $A=\frac{1-v}{v}\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$ C. $A=\frac{v}{v-1}\cdot\log\left(\frac{v-1}{v}\right)$ Welke van deze formules komt overeen met de formule van Petrov? Licht je antwoord toe.
2. Schrijf $y=1000\cdot(0{,}1)^{0{,}05x}$ in de vorm $y=b\cdot g^x$. Rond g af op twee decimalen.
3. Herleid $11000\cdot 0{,}9^t\cdot\left(0{,}7-0{,}5\cdot 0{,}9^{2t}\right)$ tot $7700\cdot 0{,}9^t-5500\cdot 0{,}9^{3t}$
4. Gegeven is $\log G=2\cdot\log D+1{,}18$. Druk D uit in G.
5. Herleid $K=(6G)^{0{,}425}\cdot(4L)^{0{,}725}$ tot de vorm $K=a\cdot G^b\cdot L^c$. Rond a af op twee decimalen.
6. Laat zien dat uit $S=\frac{1000}{R^3}$ en $R=\sqrt{100+x^2}$ volgt dat $S=1000\cdot\left(100+x^2\right)^{-1{,}5}$.
7. Gegeven is $H=\frac{6{,}7\cdot k^{1{,}35}}{R}$. Geef een formule voor k uitgedrukt in H en R.
F. Herleidingen uitvoeren
1. Ontleend aan opgave A (Groeibelegging) van hoofdstuk 5, vraag 4. Gegeven zijn de formules $L=0,75\cdot t$, $D=0,0042\cdot t+0,072$ en $M=0,16\cdot D^2\cdot L$. M kan worden geschreven in de vorm $M=a\cdot t^3+b\cdot t^2+c\cdot t$. Bereken a, b en c.
2. Ontleend aan opgave J (Sauna) van hoofdstuk 5, vraag 5. De formule $S=200-180\cdot\mathrm{e}^{-0{,}29t}$ herleiden tot $t=\dfrac{\ln\frac{200-S}{180}}{-0,29}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
3. Laat zien dat uit $S=\frac{1000}{R^3}$ en $R=\sqrt{100+x^2}$ volgt dat $S=1000\cdot\left(100+x^2\right)^{-1{,}5}$.
4. Gegeven zijn $B=\frac{L}{120}\cdot\left(1-\frac{P}{100}\right)$ en $P=\frac{L}{3}+4$. Geef een formule voor B uitgedrukt in L.
5. Laat zien dat uit $K=0{,}1A+150$ en $A=\frac{1}{3}q^2$ volgt dat $K=\frac{q^2}{30}+150$.
6. Laat zien dat uit $3{,}5x-5=-4y+40$ volgt dat $y=-0{,}875x+11{,}25$.
7. Bereken a en b uit $\begin{cases} a=178+b \\ a=205+0{,}36b \end{cases}$
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen
1. De vergelijkingen $0{,}08\cdot N-\frac{25\cdot B}{312{,}5-x}=0$ en $x=15$ gebruiken om N uit te drukken in B.
2. Ontleend aan opgave E (Tanken) van hoofdstuk 5, vraag 5. De vergelijking $0{,}08\cdot N-\frac{25\cdot B}{312{,}5-x}=0$ herleiden tot $x=312{,}5\cdot(1-\frac{B}{N})$.
3. Ontleend aan opgave J (Sauna) van hoofdstuk 5, vraag 5. De formule $S=200-180\cdot\mathrm{e}^{-0{,}29t}$ herleiden tot $t=\dfrac{\ln\frac{200-S}{180}}{-0,29}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).

4. Laat zien dat uit $\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{t}} - 3 = 0$ volgt dat $t = 2\frac{1}{4}$.
5. Gegeven is $D = 6{,}9\sqrt{T - 12}$. Druk T uit in D.
6. Gegeven is $H = \frac{6{,}7 \cdot k^{1{,}35}}{R}$. Geef een formule voor k uitgedrukt in H en R.
H. Vergelijkingen oplossen met behulp van algoritmen
1. Ontleend aan opgave C (Sterilisatie) van hoofdstuk 5, vraag 5. Gegeven is de formules $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$. Hierin is $N(t)$ het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Toon aan, door gebruik te maken van de formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$, dat tussen D en r een omgekeerd evenredig verband bestaat.
2. Ontleend aan opgave J (Sauna) van hoofdstuk 5, vraag 5. De formule $S = 200 - 180 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}29t}$ herleiden tot $t = \frac{\ln \frac{200 - S}{180}}{-0{,}29}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).
3. Laat zien dat uit $g^4 = 1{,}82$ volgt dat $g = 1{,}82^{0{,}25}$.
4. Gegeven is $H = \frac{6{,}7 \cdot k^{1{,}35}}{R}$. Geef een formule voor k uitgedrukt in H en R.
5. Bereken a en b uit $\begin{cases} a = 178 + b \\ a = 205 + 0{,}36b \end{cases}$
K. Vergelijkingen en ongelijkheden oplossen
1. Het voortbestaan van een populatie haviken hangt af van geboorte- en sterftecijfers. Om de populatie op peil te houden is er elk jaar een minimaal aantal jonge vogels nodig. De Duitse bioloog Mets heeft de volgende formule ontworpen: $N = \frac{2m}{(1-q)(1-m)}$. Hierin is: N = het *minimale* aantal jongen per havikenpaar dat gemiddeld per jaar nodig is om de populatie op peil te houden; q = het sterftecijfer van de eerstejaarsvogels; m = het sterftecijfer van de oudere vogels. Uit recent onderzoek blijkt dat voor Nederland geldt dats $q = 0{,}412$. Ook is bekend dat voor de havikenparen geldt dat 100 paren gemiddeld *minimaal* 136 jongen nodig hebben. Met behulp van deze gegevens en de geven formule is het sterftecijfer m van de oudere haviken te berekenen. Dat levert een vergelijking op van de vorm $am + b = 0$. Bereken a en b en vervolgens het sterftecijfer m van de oudere haviken.
2. Bereken a en b uit $\begin{cases} a = 178 + b \\ a = 205 + 0{,}36b \end{cases}$
3. Ontleend aan opgave D (Verhoudingen) van hoofdstuk 5, vraag 4. Het oplossen van de vergelijking $\left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = 0{,}1544$.
4. Ontleend aan opgave F (Golvend dak) van hoofdstuk 5, vraag 2. Het oplossen van de vergelijking $3 \cdot \sin(0{,}1x) + 7 = 8$.

Hoofdstuk 5 Voorbeeldopgaven

In dit hoofdstuk treft u een aantal voorbeeldopgaven aan waarin een beeld wordt geschetst van de wijze waarop de (sub)domeinen van het examenprogramma kunnen worden getoetst binnen contexten. De opgaven zijn bewerkingen van oude examenopgaven, aangepast aan de inhoud van de subdomeinen uit het onderhavige examenprogramma, voor zover dat deel uit maakt van het CSE.

De syllabuscommissie heeft deze opgaven en de afzonderlijke deelvragen zorgvuldig gescreend op de specificaties van het examenprogramma. In de tabel op de volgende pagina wordt aangegeven op welke (sub)domeinen de afzonderlijke vragen betrekking hebben. Daarmee geven de opgaven op adequate wijze het relevante en haalbare niveau weer.
Kandidaten die deze opgaven kunnen maken zijn goed voorbereid op het examen; kunnen ze dat matig of niet dan zullen ze echt er nog eens stevig aan moeten werken.

Het betreft de volgende opgaven.

	Opgave	Bron
A	Groenbelegging	examen wA1 vwo 2007, 1^e tijdvak
B	Al doende leert men	examen wiA1 vwo 2004, 2^e tijdvak
C	Sterilisatie	examen wiA1,2 vwo 2006, 2^e tijdvak
D	Verhoudingen	examen wiA1 vwo 2007, 1^e tijdvak
E	Tanken	examen wiA vwo oude stijl 2004, 1^e tijdvak
F	Golvend dak	examen wiB1,2 havo 2008, 1^e tijdvak
G	Lawaaitrauma	examen wiB1 havo 2001, 1^e tijdvak
H	Genius	examen wiA1,2 vwo 2008, 2e tijdvak
I	Keno	examen wiA1,2 vwo 2002, 2e tijdvak
J	Sauna	examen wiB1, vwo 2006, 1e tijdvak

Subdomeinen	opgaven met vragen									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A1 Algemene vaardigheden De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gerichte informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.										
A2 Profielspecifieke vaardigheden De kandidaat kan een profielspecifieke probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.										
A3 Wiskundige vaardigheden De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.										
B1 Algebra De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen, daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen en van het werken met haakjes, en beargumenteren waarom de gekozen aanpak werkt.	1 2 3 4	1 5		3 4	1 2 5		1		3	
B2 Telproblemen De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.								1 2	1 2	
C1 Functies De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, goniometrische functies, exponentiële functies en logaritmische functies de kenmerken in grafiek, tabel en formule herkennen en gebruiken.		3 5 6	2 3			1 2 3	1			
C2 Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden De kandidaat kan formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met algebraïsche methoden zonder gebruik van ICT, en daar waar nodig met numerieke of grafische methoden met inzet van ICT, en de uitkomst interpreteren in termen van de context.	1 3 4		1 2 5	4 5 6	3 4 5	2 3	2 3			1 5
D1 Rijen De kandidaat kan het gedrag van een rij herkennen, beschrijven en er berekeningen mee uitvoeren, in het bijzonder in het geval van rekenkundige en meetkundige rijen.		2 3 4 5		1 2						
D2 Helling De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken of functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met de probleemsituatie.										2
D3 Afgeleide De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de afgeleide bepalen, de rekenregels voor het differentiëren gebruiken en aan de hand van de afgeleide het veranderingsgedrag van een functie bestuderen.			4							3 4

A. Groenbelegging

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.

foto Plantage waar bomen voor belegging gekweekt worden

Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

> Uw belegging groeit vanzelf.
> De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant.
> Hoe ouder de bomen, hoe langer en dikker ze worden. Voordat de bomen gekapt worden, groeien ze voortdurend volgens de formules
> $L = 0,75 \cdot t$ en $D = 0,0042 \cdot t + 0,072$.
> Hierbij is t de tijd in jaren na het plantmoment, L de lengte van een boom in meters en D de stamdiameter in m.
>
> De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0,16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout van de boom.

Die formules voor L en D benaderen de werkelijke groei slechts. Direct na het planten passen de formules echter nog niet zo goed bij de echte groei van de bomen.
Pas vanaf het moment dat volgens de formules de diameter van de Labironia-boom 5% bedraagt van de lengte van een Labironia-boom, gelden de formules.

3p 1 Vanaf welk moment na het plantmoment gelden de formules?

Een Labironia-boom van 15 jaar oud levert meer m^3 benutbaar hout op dan een van 8 jaar oud.

3p 2 Bereken hoeveel m^3 het verschil bedraagt. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Ook is het zo dat de groei van oudere bomen van deze soort niet volgens de formules plaats zal vinden. Omdat alle bomen toch op een bepaald vastgesteld moment na het planten gekapt zullen worden, is het in deze opgave niet van belang dat de groei op zeker moment niet meer volgens de formules verloopt.
De 960 bomen op één perceel worden niet alle op hetzelfde moment gekapt. Dat kappen gebeurt in verschillende rondes. De laatste ronde van dat kappen, het moment dus dat alle bomen gekapt zijn, vindt plaats op het moment dat een Labironia-boom een diameter heeft van 0,156 m.

4p 3 Bereken de lengte van een Labironia-boom op het moment van de laatste kapronde.

De houtopbrengst van een boom kan geschreven worden in de volgende vorm:

$$M = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$$

5p 4 Bereken a, b en c.

B. Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enz.

Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $\frac{16+12{,}8}{2}=14{,}4$ minuten. Deze 14,4 minuten zie je in tabel 1. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

tabel 1

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Met behulp van tabel 1 kunnen we berekenen dat een werknemer 8,1 minuten nodig heeft om handeling A voor de 5e keer te verrichten.

3p 1 Geef zo'n berekening.

Wanneer we de gemiddelde handelingstijd H_n willen uitrekenen voor meer dan 6 handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n. Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:

$$H_n = 0{,}14n^2 - 2n + 17{,}8$$

Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van tabel 1 voor $n=1$ tot en met $n=6$.

3p 2 Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit tabel 1 en de bijbehorende waarden van H_n.

Voor grote waarden van n is de formule voor H_n echter niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven.

4p 3 Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet.
Toch kunnen we bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na 10 handelingen uitrekenen. Daarbij maken we gebruik van T_n, de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:

$$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$$

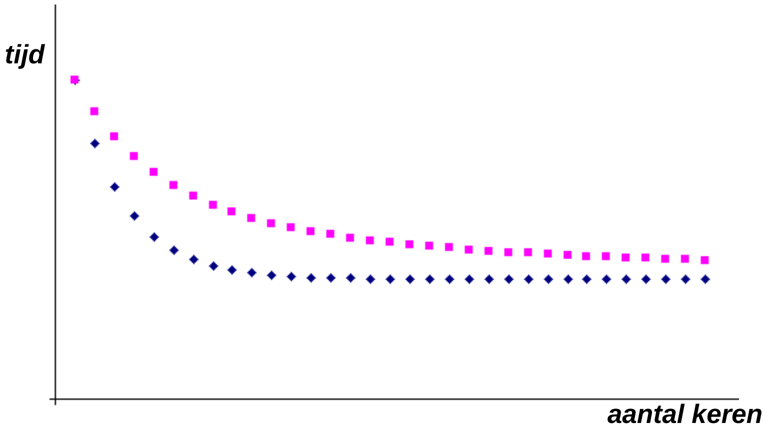
In deze formule is T_n in minuten. Inderdaad levert deze formule $T_n \approx 16$ en $T_n \approx 12{,}8$.
Met deze formule kunnen we ook andere handelingstijden uitrekenen en dus ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

4p 4 Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer 10 keer handeling A heeft uitgevoerd.

Als je kijkt naar de formule $T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$, dan kun je constateren dat T_n steeds kleiner wordt als n groter wordt. Op de lange duur komt T_n echter niet onder een bepaalde grens.

3p 5 Hoe groot is die grens? Licht je antwoord toe.

figuur 1



Hierboven staan schetsen van de grafieken van de handelingstijd en de gemiddelde handelingstijd in één assenstelsel. Naar aanleiding van deze figuur maakt iemand de volgende twee opmerkingen:
1. Een van beide grafieken zal altijd boven de andere grafiek liggen.
2. De twee grafieken komen steeds dichter bij elkaar en er zal op den duur geen echt verschil meer te zien zijn.

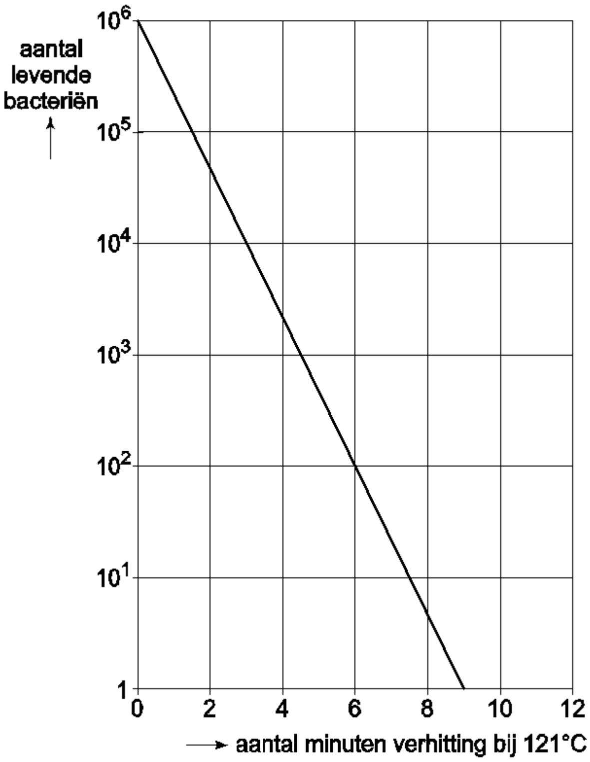
Door redeneren zonder rekenen kun je onderzoeken of deze opmerkingen waar zijn of niet.

6p 6 Onderzoek op deze wijze of deze beweringen waar zijn.

C. Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethoden.
In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. In figuur 1 zie je een overlevingsgrafiek van de Bacillus stearothermophilus. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. We gaan er steeds van uit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft.
Bij de grafiek in figuur 1 hoort een formule van de vorm:

$$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$$

Hierin is $N(t)$ het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën.

Met behulp van figuur 1 kun je berekenen dat de sterftefactor r van de Bacillus stearothermophilus ongeveer gelijk is aan 2,2.

4p 1 Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

5p 2 Bereken voor de Bacillus stearothermophilus de D-waarde met behulp van bovenstaande formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van figuur 1.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor de Clostridium botulinum is deze D-waarde gelijk aan 2,55 minuten.
Met dit gegeven kunnen we de overlevingsgrafiek van de Clostridium botulinum tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek beginnen we weer met 1 miljoen bacteriën.

4p 3 Teken deze overlevingsgrafiek in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

Zoals hierboven al beschreven, geldt voor Bacillus stearothermophilus de formule

$$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t}$$

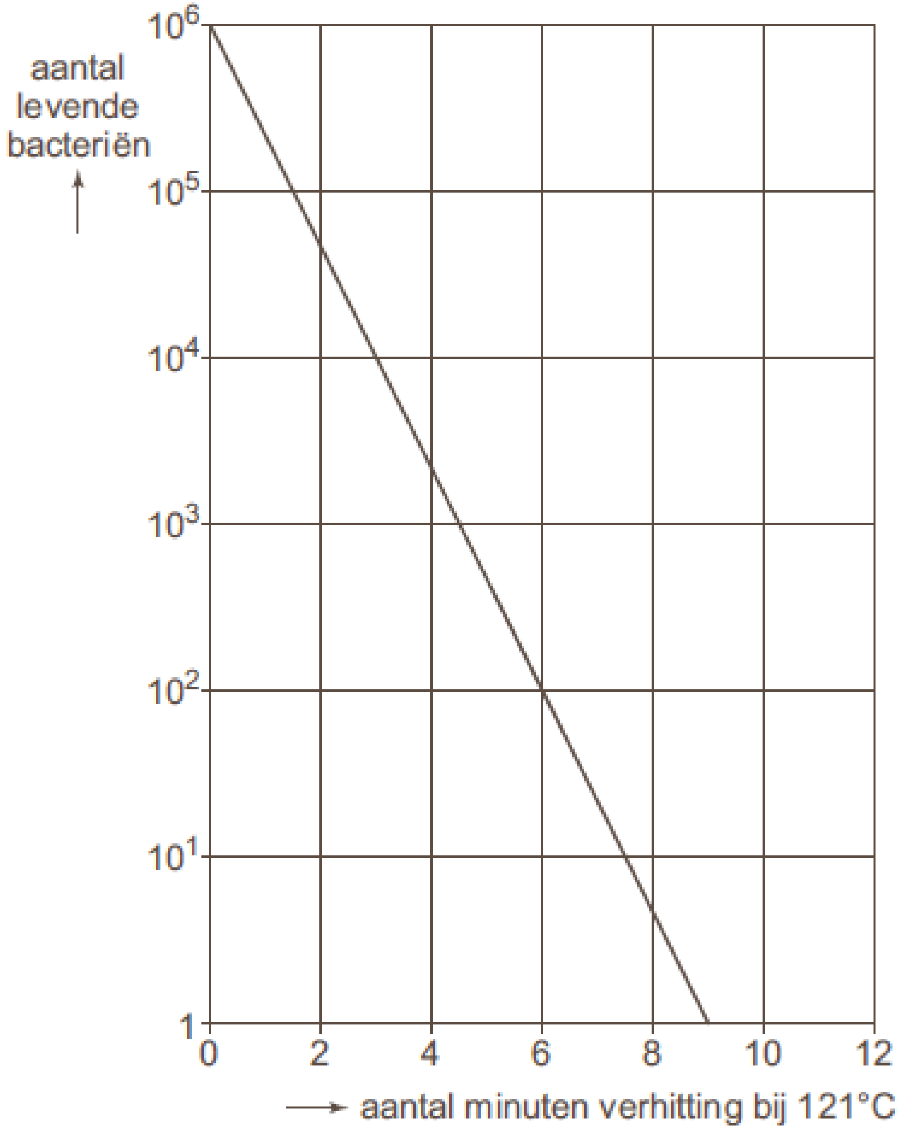
Met behulp van deze formule kun je voor elk tijdstip t berekenen hoe groot het aantal bacteriën op dat tijdstip is.
Je kunt aan deze formule (en ook aan de grafiek, zie figuur 1) zien dat er steeds minder bacteriën zijn naarmate de tijd toeneemt. Het aantal bacteriën neemt echter niet met een vast aantal per minuut af.

6p 4 Bereken, gebruik makend van de afgeleide functie van $N(t)$, op welk tijdstip dat aantal bacteriën afneemt met 10 000 bacteriën per minuut.

Voor elk type bacteriën kunnen we de D-waarde berekenen wanneer we de sterftefactor r kennen. Daarvan heb je in vraag 2 een voorbeeld gezien. Wanneer we dat voor een aantal typen bacteriën doen, blijkt dat D en r omgekeerd evenredig zijn.

4p 5 Toon aan, door gebruik te maken van de formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t}$, dat tussen D en r een omgekeerd evenredig verband bestaat.

BIJLAGE BIJ STERILISATIE



D. Verhoudingen

In de wiskunde is de volgende rij getallen erg bekend:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Deze rij getallen staat bekend als de rij van Fibonacci (Pisa, 1170-1250). Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee voorgaande getallen op te tellen. In formulevorm ziet dit er als volgt uit:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ met } u_1 = 1 \text{ en } u_2 = 1$$

Je kunt dit eenvoudig narekenen bij het begin van de rij:

2 = 1 + 1
3 = 2 + 1
5 = 3 + 2
8 = 5 + 3
enzovoort.

Het is duidelijk dat de getallen in de rij van Fibonacci steeds groter worden.

4p 1 Bereken hoeveel getallen in de rij van Fibonacci een waarde hebben tussen 100 en 500.

De rij van Fibonacci heeft veel bijzondere eigenschappen. Zo heeft de rij die je krijgt door steeds de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci te nemen een grenswaarde G.
Het gaat dan om de rij $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$ enzovoort. De waarde van deze breuken is op den duur ongeveer gelijk aan 1,618. Vanaf een zeker moment ligt deze verhouding tussen 1,6180 en 1,6181. Deze grenswaarde G is, met name in de kunst, bekend geworden als de gulden snede.

4p 2 Bereken vanaf welk tweetal opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci de verhouding ligt tussen 1,6180 en 1,6181.

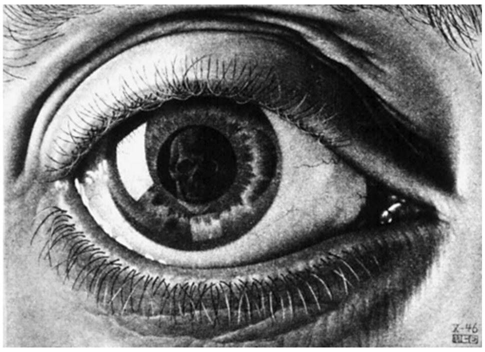
In de 19e eeuw deed Fechner onderzoek naar de esthetische waarde die door velen aan de gulden snede wordt toegekend. Hij liet een aantal mensen rechthoeken zien waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte telkens verschillend was. Aan deze mensen werd gevraagd welke rechthoek zij het mooist vonden. Uit het onderzoek bleek dat rechthoeken waarvan de verhouding van de lengte en de breedte ongeveer de gulden snede opleverde, het meest werden uitgekozen.
Mede op grond van deze resultaten stelde Petrov een formule op waarmee hij deze voorkeur wilde uitdrukken in een getal. Hij noemde dit de appreciatiewaarde A van de rechthoek en kwam met de volgende formule:

$$A = \left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right)$$

In deze formule is v de verhouding tussen de langste zijde en de kortste zijde van de rechthoek, dus $v = \frac{\text{langste zijde}}{\text{kortste zijde}}$.

schilderij

litho



De afmetingen van het schilderij ‘De Nachtwacht’ van Rembrandt van Rijn zijn 363 cm bij 437 cm. De afmetingen van ‘Oog’, een litho van M.C. Escher, zijn 141 cm bij 198 cm.

3p 3 Bereken welk van deze twee kunstvoorwerpen de grootste appreciatiewaarde heeft volgens de formule van Petrov.

Het schilderij ‘Moment’ van Barnet Newman heeft een appreciatiewaarde van 0,1544 en de langste zijde van dit schilderij is 762 cm. Die langste zijde is meer dan 3 meter langer dan de kortste zijde.

6p 4 Bereken de lengte van de kortste zijde van ‘Moment’.

Petrov constateerde dat de verhouding v tussen de langste en de kortste zijde waarbij de appreciatiewaarde maximaal is, maar weinig verschilt van de waarde 1,618 van de gulden snede.

4p 5 Bereken dit verschil.

De formule van Petrov werd oorspronkelijk op een iets andere manier opgeschreven dan hierboven vermeld. Hieronder staan drie verschillende mogelijkheden A, B en C voor die oorspronkelijke schrijfwijze. Slechts één van de drie komt overeen met de formule die hierboven vermeld wordt.

A. $A = \dfrac{v-1}{v} \cdot \log\left(\dfrac{v}{v-1}\right)$

B. $A = \dfrac{1-v}{v} \cdot \log\left(\dfrac{v}{v-1}\right)$

C. $A = \dfrac{v}{v-1} \cdot \log\left(\dfrac{v-1}{v}\right)$

5p 6 Welke van deze formules komt overeen met de formule van Petrov? Licht je antwoord toe.

E. Tanken

De onderstaande tekst is afkomstig uit een artikel uit een landelijk dagblad van augustus 1997.

artikel

> …………De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is 5 gulden per liter en die in Duitsland is 2 gulden per liter. Dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van 150 gulden. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 20 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 750 kilometer rijden, dat is 375 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Den Helder nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten vertrekken om de grens te halen en met een half lege thuis zou komen…………..

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van 'tanken in het buitenland' bekijken we in de vragen 1 en 2 een vereenvoudigd voorbeeld:
Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Jan woont op 200 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 km rijdt. Als hij tankt, tankt hij altijd precies 50 liter.

Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen.
Jan redeneert op de manier van het artikel: "mijn voordeel is 3 gulden per liter; zelfs als ik daar de kosten van het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel".

4p 1 Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken volgens deze redenering 70 gulden bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen per gebruikskilometer. Een gebruikskilometer is elke afgelegde kilometer die niet gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

5p 2 Hoe groot is het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland voor Jan? Licht je antwoord toe met een berekening.

We bekijken nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noemen we N (in gulden per liter), de benzineprijs in het buitenland noemen we B (in gulden per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noemen we x (in km). Voor het voordeel bij tanken in het buitenland V (in gulden) per gebruikskilometer geldt dan:

$$V = 0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{3125 - x}$$

Hierbij gaan we ervan uit dat:
– auto's 1 op 12,5 rijden: elke auto rijdt 12,5 km op 1 liter benzine;
– een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 50 liter tankt;
– een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken;
– een eigenaar van een auto niet extra hoeft te rijden om in Nederland te tanken.

5p 3 Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 15 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.

4p 4 Toon dat aan.

De literprijs van benzine verandert met grote regelmaat. Daarmee verandert ook de afstand tot het dichtstbijzijnde tankstation in het buitenland waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken.

5p 5 Toon aan dat uit $V = 0{,}08 \cdot N - \dfrac{25 \cdot B}{3125 - x}$ volgt dat deze afstand gelijk is aan $312{,}5 \cdot \left(1 - \dfrac{B}{N}\right)$.

F. Golvend dak

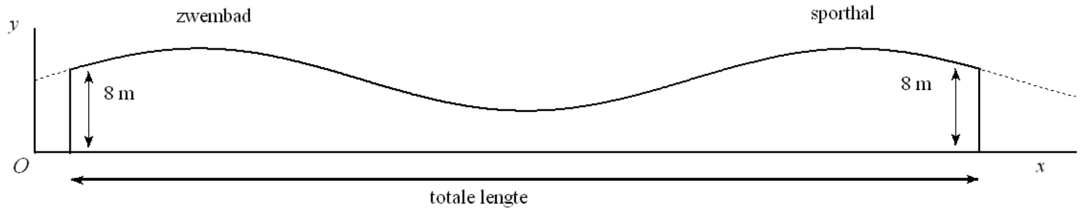
Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen foto onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In figuur 1 is een schematisch vooraanzicht getekend.
In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule

$$h = 3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7$$

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meter. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog. Zie figuur 1.

figuur 1



3p 1 Bereken de minimale en de maximale hoogte van het dak.

4p 2 Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.

Zoals je aan de grafiek in figuur 1 kunt zien, is de helling van het vooraanzicht niet overal hetzelfde.

5p 3 Op hoeveel meter van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw (zie figuur 1) is de helling het grootst? Licht je antwoord toe.

G. Lawaaitrauma

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

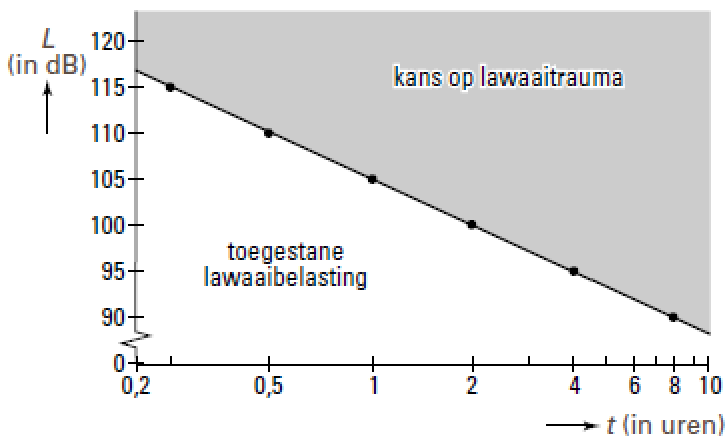
In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.
Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.
Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982-1988 exponentieel toenam.

5p 1 Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.
Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:
– bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
– bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

In het assenstelsel van figuur 1 is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidssterkte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industrielawaai in de VS. Op de horizontale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
L is de geluidssterkte in dB en t is de maximaal toegestane werktijd in uren.

figuur 1



De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:
– bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
– bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

Op de bijlage is de lijn van figuur 1, behorend bij de norm van de VS, nogmaals in een assenstelsel getekend. Ook hier is op de horizontale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

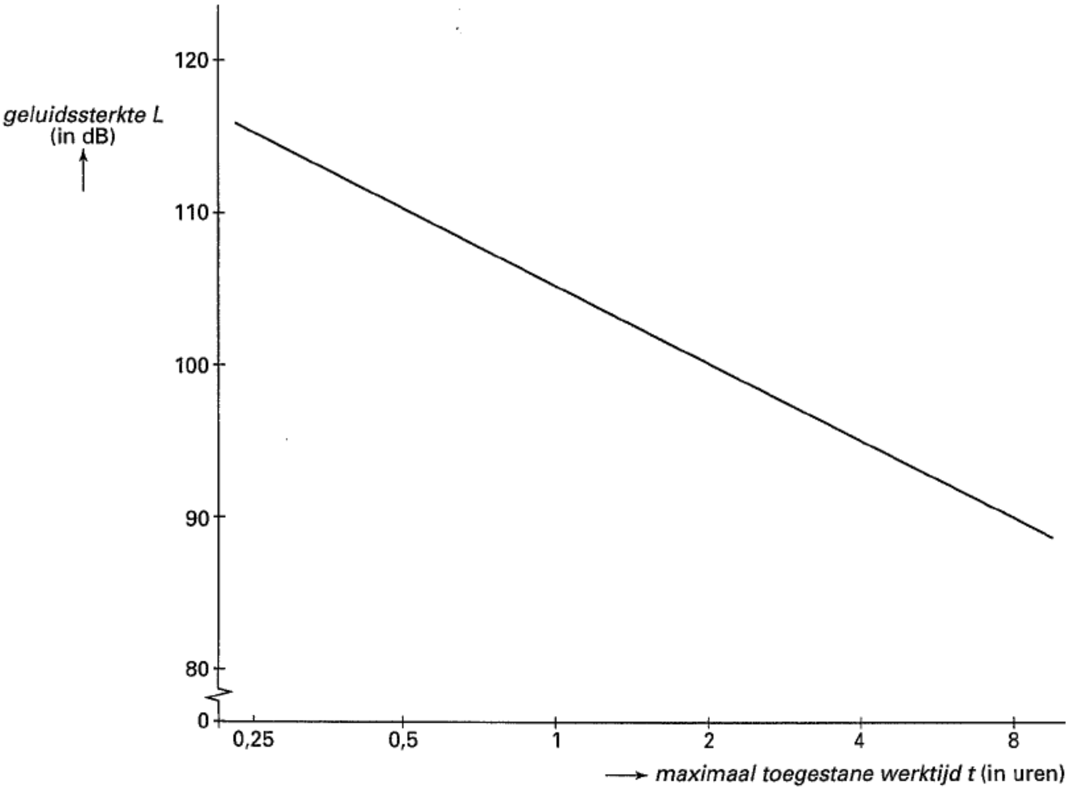
3p 2 Teken in dit assenstelsel de lijn die bij de Europese norm hoort.

De formule die hoort bij de in figuur 1 getekende lijn is $L = -16{,}6 \cdot \log(t) + 105$

In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidssterkte.
In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.

5p 3 Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

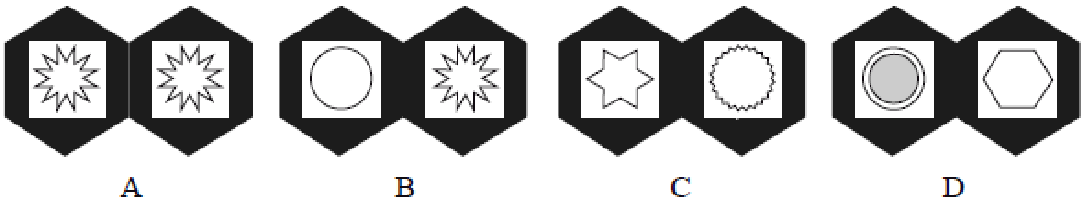
BIJLAGE BIJ LAWAAITRAUMA



H. Genius

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak.
Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. In figuur 1 zijn vier tegels afgebeeld.

figuur 1



Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in figuur 1 komt dus 5 keer voor.
Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B in figuur 1) komt 6 keer voor.

5p 1 Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

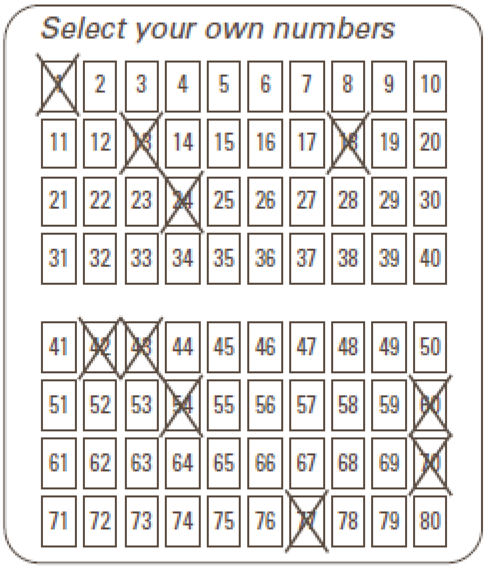
Edwin en zijn vrienden zijn helemaal bezeten van dit voor hen nieuwe spel. Zij denken erover om een toernooi te houden. Zij laten daarbij steeds twee spelers tegen elkaar spelen. Aan deze competitie doen 16 spelers mee.
De spelers worden verdeeld over 4 poules van 4 spelers. In elke poule speelt elke speler één keer tegen elke andere speler. Na afloop van de poulewedstrijden gaan de beste twee spelers van elke poule door naar de kwartfinale. In de kwartfinale speelt elke speler maar tegen één andere speler. De winnaars van deze wedstrijden gaan door naar de halve finale.
In deze halve finale speelt weer elke speler één wedstrijd.
De winnaars spelen tenslotte de finale, die ook over één wedstrijd wordt beslist.

4p 2 Bereken het aantal wedstrijden dat tijdens dit toernooi gespeeld moet worden.

I. Keno

In de Verenigde Staten kun je op veel plaatsen het kansspel Keno spelen. De spelregels en de te winnen prijzen zijn niet overal precies hetzelfde. We kijken in deze opgave naar één bepaalde vorm waarin het spel gespeeld kan worden.
Een lot kost 1 dollar. Op het lot staan de getallen 1 tot en met 80. Om mee te spelen moet je 10 van deze 80 getallen aankruisen. Dat kan op verschillende manieren. In figuur 1 zie je daar een voorbeeld van.

figuur 1



3p 1 Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om 10 verschillende getallen op het lot te kiezen.

Bij de trekking worden door een trekkingsmachine willekeurig 22 getallen gekozen uit de getallen 1 tot en met 80. Nu gaat het erom, hoeveel van de 10 aangekruiste getallen goed zijn. Dat wil zeggen, hoeveel er bij de 22 getallen uit de trekkingsmachine zitten.
Volgens Fred is het aantal mogelijkheden om op een lot 2 getallen aan te kruisen die goed zijn, meer dan 10 keer zo groot is als het aantal mogelijkheden waarbij geen enkel aangekruist getal goed is.

4p 2 Onderzoek of Fred gelijk heeft.

De maker van een website over dit spel verzamelt al sinds de introductie van dit spel de resultaten van alle trekkingen. Hij houdt ook voortdurend bij hoe vaak elk van de 80 getallen getrokken is in alle trekkingen tot dan toe. Op basis daarvan publiceerde hij op een bepaald moment tabel 1. Uit deze tabel blijkt bijvoorbeeld dat tot dat moment 11 van de 80 getallen ten minste 290 keer en ten hoogste 299 keer waren getrokken.

tabel 1

aantal keren getrokken	aantal getallen
260 - 269	2
270 - 279	1
280 - 289	4
290 - 299	11
300 - 309	21
310 - 319	21
320 - 329	15
330 - 339	3
340 - 349	0
350 - 359	2

Tabel 1 heeft betrekking op een groot aantal trekkingen van telkens 22 getallen. Met behulp van de gegevens in de tabel kunnen we een schatting maken van dit aantal trekkingen. De maker van de website beweerde dat tabel 1 betrekking had op 1126 trekkingen.

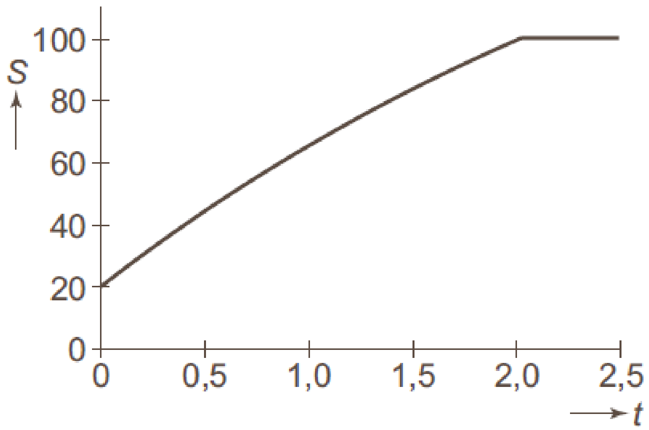
5p 3 Onderzoek of deze bewering in overeenstemming kan zijn met de gegevens in tabel 1.

J. Sauna

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Voor het opwarmen geldt de formule $S = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$.
Hierin is S de temperatuur in de sauna in graden Celsius en t de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden.
In figuur 1 staat de grafiek van S.

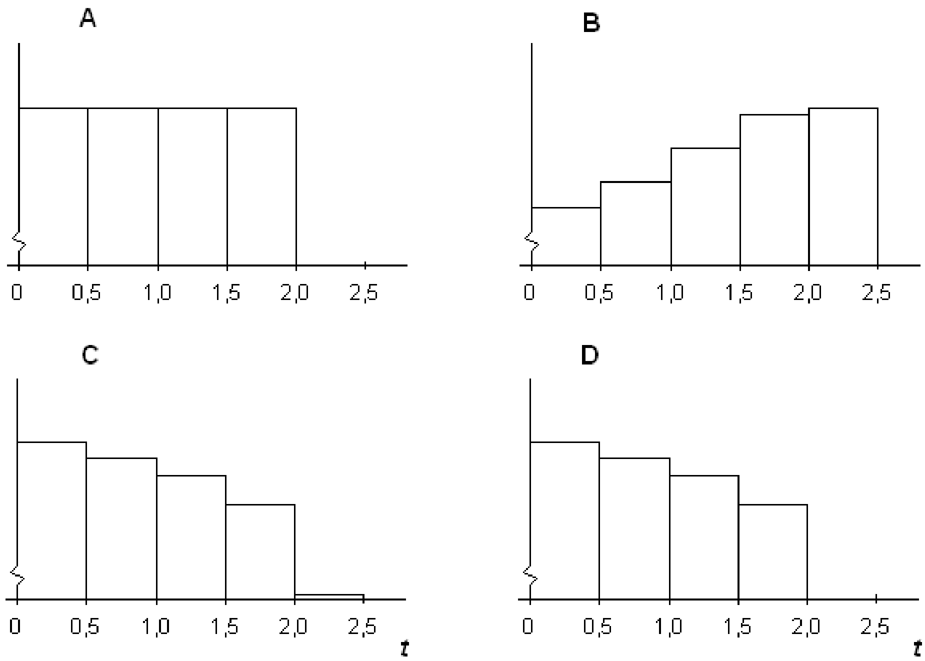
figuur 1



4p 1 Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.

Om na te gaan hoe de opwarming van de sauna verloopt, wil men kijken naar een toenamediagram dat hierbij hoort. In figuur 2 zie je vier toenamediagrammen, allemaal met een stapgrootte van een half uur, voor de periode van 15.00 uur tot 17.30 uur.

figuur 2



4p 2 Welk van de in figuur 2 geschetste diagrammen is het juiste toenamediagram? Licht je antwoord toe.

Als je in de grafiek van S naar het opwarmen kijkt, lijkt de temperatuur afnemend te stijgen.

4p 3 Onderzoek met behulp van differentiëren of deze conclusie juist is.

3p 4 Bereken $S'(1)$, afgerond op 1 decimaal en geef de betekenis ervan in deze situatie.

Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S.

4p 5 Druk t uit in S.

Beoordelingmodel

A. Groenbelegging

vraag 1 maximumscore 3

Op dat moment geldt: $0,0042\cdot t+0,072=0,05\cdot 0,75\cdot t$ 1

Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1

Het antwoord: $t\approx 2,2$ dus na 2 jaar (of nauwkeuriger) 1

vraag 2 maximumscore 3

Een boom van 8 jaar levert (ongeveer) 0,0107 m^3 hout 1

Een boom van 15 jaar levert (ongeveer) 0,0328 m^3 hout 1

Het verschil is 0,022 (m$^{3)}$ 1

Opmerking
Als de houtopbrengsten bij 98 en 15 jaar slechts in 3 decimalen vermeld zijn, hiervoor geen punten in mindering brengen.

vraag 3 maximumscore 4

De vergelijking $0,0042\cdot t+0,072=0,156$ moet worden opgelost 1

Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1

Hieruit volgt dat $t=20$ 1

Het antwoord: (een boom is op dat moment) 15 meter 1

vraag 4 maximumscore 5

$M=0,16\cdot D^2\cdot L=0,16\cdot(0,0042\cdot t+0,072)^2\cdot 0.75\cdot t$ 1

$M=0,16\cdot(0,0042^2\cdot t^2+2\cdot 0,0042\cdot 0,072\cdot t+0,072^2)\cdot 0.75\cdot t$ 1

$M=0,16\cdot 0,0042^2\cdot t^2\cdot 0,75\cdot t+0,16\cdot 2\cdot 0,0042\cdot 0,072\cdot t\cdot 0,75\cdot t+0,16\cdot 0,072^2\cdot 0,75\cdot t$ 1

$M=0,16\cdot 0,0042^2\cdot 0,75\cdot t^3+0,16\cdot 2\cdot 0,0042\cdot 0,072\cdot 0,75\cdot t^2+0,16\cdot 0,072^2\cdot 0,75\cdot t$ 1

Dus $a=0,16\cdot 0,0042^2\cdot 0,75\approx 2\cdot 10^{-6}$, $b=0,16\cdot 2\cdot 0,0042\cdot 0,072\cdot 0,75\approx 7\cdot 10^{-5}$ en
$c=0,16\cdot 0,072^2\cdot 0.75\cdot\approx 6\cdot 10^{-4}$ 1

B. Al doende leert men

vraag 1 maximumscore 3

Het 5 keer verrichten van handeling A kost $5\cdot 11,3=56,5$ minuten 1

Het 4 keer verrichten van handeling A kost $4\cdot 12,1=48,4$ minuten 1

De 5e keer kost 56,5 – 48,4 = 8,1 minuten 1

vraag 2 maximumscore 3

Het invoeren van de formule voor H_n in de GR 1

Het maken van een tabel met uitkomsten van H_n 1

Het antwoord 0,14 (bij $n=6$) 1

vraag 3 maximumscore 4

De gemiddelde handelingstijd moet steeds kleiner worden 2

De waarden van H_n worden weer groter (dus de formule voldoet niet) 2

vraag 4 maximumscore 4

Het invoeren van de formule van T_n in de GR 1

Een geschikte optie van de GR gebruiken om de som te berekenen 1

Voor $n = 10$ is de totale handelingstijd (ongeveer) 90,6 minuten 1
De gemiddelde handelingstijd is (ongeveer) 9,1 minuten 1
of
Het berekenen van T_1 tot en met T_{10} 2
De som van deze handelingstijden is (ongeveer) 90,6 minuten 1
De gemiddelde handelingstijd is (ongeveer) 9,1 minuten 1

vraag 5 maximumscore 3
Als n heel erg groot wordt, dan wordt $0{,}68^n$ ongeveer 0 1
$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$ wordt op den duur dus ongeveer 6 maar blijft daar wel altijd boven 1
Die grens is dus 6 1

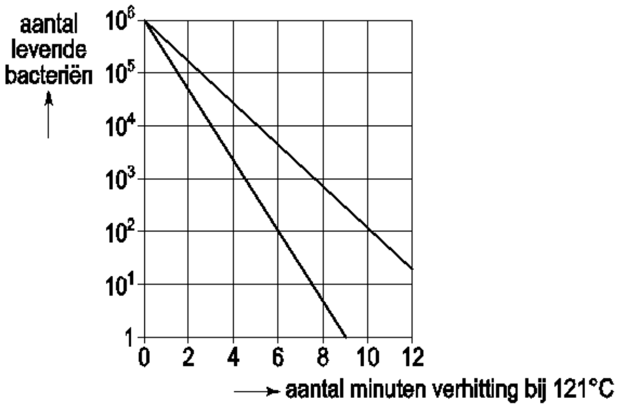
vraag 6 maximumscore 6
T_n daalt voortdurend 1
H_n, het gemiddelde van T_1 tot en met T_n, is daarmee altijd groter dan de laatste waarde (T_n) van de verschillende termen T_1 tot en met T_n 1
De grafiek van H_n zal daarmee voor iedere waarde van n boven de grafiek van T_n liggen dus de eerste bewering is waar 1
T_n komt steeds dichter in de buurt van een bepaald getal (namelijk 6, zie vorige vraag) 1
Er worden dus op den duur alleen maar (nagenoeg) dezelfde getallen aan de serie toegevoegd waarmee H_n berekend wordt 1
Het gemiddelde H_n zal daarmee op den duur ook steeds meer op datzelfde getal gaan lijken dus ook bewering 2 is waar 1

C. Sterilisatie

vraag 1 maximumscore 4
Een punt op de lijn, bijvoorbeeld (6, 10^2) 1
De bijbehorende vergelijking $10^2 = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot 6}$ 1
Aangeven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
De oplossing $r \approx 2{,}2$ 1
of
Een aanpak met het berekenen van bijvoorbeeld $10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot 6}$ 1
Dit is ongeveer gelijk aan 106 1
Dit resultaat correspondeert met (ongeveer) het punt (6, 10^2) 1
Dit punt ligt op de lijn 1

vraag 2 maximumscore 5
Het opstellen van de vergelijking $0{,}1 = 2^{-2{,}2 \cdot D}$ 1
Aangeven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
$D \approx 1{,}5$ 1
Controle via de grafiek:
Een reductie tot 10% is een ‘eenheid’ op de verticale as omlaag 1
Op de horizontale as neemt de tijd dan toe met ongeveer 1,5 1

vraag 3 maximumscore 4
Het startpunt (0, 10^6) 1
Een tweede punt, bijvoorbeeld (2,55; 10^5) 2
Een rechte lijn door de punten 1



vraag 4 maximumscore 6

Voor de afgeleide geldt: $N'(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t} \cdot \ln 2 \cdot -2,2$ 1

De vergelijking $10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t} \cdot \ln 2 \cdot -2,2 = -10000$ moet worden opgelost 1

Beschrijven hoe deze vergelijking wordt opgelost 1

De oplossing: $t \approx 3,3$ 2

Het antwoord: na (ongeveer) 3,3 minuten 1

vraag 5 maximumscore 4

Er moet gelden $2^{-r \cdot D} = 0,1$ 2

Dus $-r \cdot D = \dfrac{\log(0,1)}{\log(2)}$ (of $-r \cdot D = {}^{2}\log(0,1)$) 1

Dus $r \cdot D = \text{constant}$ (of $D = \dfrac{\text{constant}}{r}$) (en dus is er sprake van een omgekeerd evenredig verband) 1

D. Verhoudingen

vraag 1 maximumscore 4

Het gegeven begin van de rij uitbreiden met 21, 34, 55, 89, … of beschrijven hoe de recurrente betrekking op de GR moet worden ingevoerd 1

De eerste term die groter is dan 100 is 144 (of u_{12}) 1

De laatste term die kleiner is dan 500 is 377 (of u_{14}) 1

Dat zijn dus 3 getallen 1

vraag 2 maximumscore 4

Het uitrekenen van (bijvoorbeeld) $\dfrac{13}{8} = 1,625$; …..; $\dfrac{89}{55} \approx 1,61818$ 1

$\dfrac{144}{89} \approx 1,61798$ 1

$\dfrac{233}{144} \approx 1,61806$ 1

Het antwoord: vanaf de termen 144 en 233 (of vanaf de 12e en 13e term) 1

of

Het invoeren van de rij $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, naast de betrekking voor u_{n+2}, op de GR 1

$\frac{u_{12}}{u_{11}} \approx 1,61798$ 1

$\frac{u_{13}}{u_{12}} \approx 1,61806$ 1

Het antwoord: vanaf de termen 144 en 233 (of vanaf de 12e en 13e term) 1

vraag 3 maximumscore 3

Voor 'De Nachtwacht' is $v \approx 1,204$ en dus $A \approx 0,131$ 1

Voor 'Oog' is $v \approx 1,404$ en dus $A \approx 0,156$ 1

Het antwoord: 'Oog' heeft de grootste appreciatiewaarde van beide 1

vraag 4 maximumscore 6

De vergelijking $\left(\frac{1}{v}-1\right)\cdot\log\left(1-\frac{1}{v}\right)=0,1544$ moet worden opgelost 1

Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1

$v \approx 1,383$ of $v \approx 1,877$ 2

De kortste zijde is (ongeveer) 406 cm of (ongeveer) 551 cm 1

Omdat de kortste zijde meer dan 3 m korter is dan de langste zijde: de kortste zijde is (ongeveer) 406 cm 1

vraag 5 maximumscore 4

Beschrijven hoe met de GR de bij het maximum van A horende waarde van v gevonden kan worden 2

$v \approx 1,582$ 1

Het verschil is (ongeveer) 0,04 1

vraag 6 maximumscore 5

$A=\left(\frac{1}{v}-1\right)\cdot\log\left(1-\frac{1}{v}\right)=\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v}-\frac{1}{v}\right)$ 1

Dus $A=\left(\frac{1-v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v-1}{v}\right)$ 1

Dus $A=\left(\frac{1-v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)^{-1}$ 1

Dus $A=-1\cdot\left(\frac{1-v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$ 1

Dus $A=\left(\frac{v-1}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$ (en dat komt overeen met mogelijkheid **A**) 1

of

Invullen van (bijvoorbeeld) $v \approx 1,204$ in ieder van de formules: formule **A** levert $A \approx 0,131$, formule **B** levert $A \approx -0,131$ en formule **C** levert $A \approx -4,550$ 3

Volgens de eerder gemelde formule moet voor $v \approx 1,204$ de appreciatiewaarde gelijk zijn aan 0,131 1

Daarmee kan alleen mogelijkheid **A** overeenkomen met de formule van Petrov 1

E. Tanken

vraag 1 maximumscore 4

Een rit om te tanken is in totaal 400 km 1

Daarvoor is 40 liter benzine nodig 1

Dat kost $40 \cdot 2$ = 80 gulden 1
Het voordeel is 150 – 80 = 70 gulden 1

vraag 2 maximumscore 5
Bij tanken in Nederland kan hij per 50 liter 500 gebruikskilometers rijden 1
1 gebruikskilometer bij tanken in Nederland kost 0,50 gulden 1
Bij tanken in het buitenland kan hij per 50 liter 100 gebruikskilometers rijden 1
1 gebruikskilometer bij tanken in het buitenland kost 1 gulden 1
Het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland is 0,50 gulden 1

vraag 3 maximumscore 5
Bij tanken in Nederland kost een gebruikskilometer $\frac{N}{12{,}5}$ (of $\frac{50N}{625}$) 1
Bij tanken in het buitenland kan iemand per 50 liter $625-2x$ gebruikskilometers rijden 1
De $625-2x$ gebruikskilometers kosten $50B$ gulden 1
1 gebruikskilometer kost $\frac{50B}{625-2x}$ gulden 1
Vereenvoudigen geeft $V = 0{,}08N - \frac{25B}{312{,}5-x}$ 1

vraag 4 maximumscore 4
Bij $x = 15$ moet het voordeel 0 zijn, dus geldt $0 = 0{,}08N - \frac{25B}{297{,}5}$ 1
$0{,}08N = \frac{25B}{297{,}5}$ 1
$N \approx 1{,}05 \cdot B$ 1
De conclusie, bijvoorbeeld: uit N is een constante groter dan 1 maal B volgt dat de benzineprijs in Nederland een vast percentage hoger is dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland (of N is altijd 5% hoger dan B) 1

vraag 5 maximumscore 5
De afstand tot het dichtstbijzijnde station in het buitenland x waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken, volgt uit de vergelijking $0 = 0{,}08N - \frac{25B}{312{,}5-x}$ 1
$0{,}08N = \frac{25B}{312{,}5-x}$ 1
$x = 312{,}5 - \frac{25B}{0{,}08N}$ 1
$x = 312{,}5 - 312{,}5 \cdot \frac{B}{N}$ 1
Dus voor die afstand x geldt: $x = 312{,}5 \cdot (1 - \frac{B}{N})$ 1

F. Golvend dak

vraag 1 maximumscore 3
$3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x)$ is maximaal 3 en minimaal –3 1
h is maximaal 3 + 7 = 10 (meter) 1
h is minimaal –3 + 7 = 4 (meter) 1

vraag 2 maximumscore 4

De vergelijking die moet worden opgelost is $3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7 = 8$ 1

Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1

$x \approx 3{,}4$ of $x \approx 90{,}8$ 1

De lengte is 87 (meter) 1

vraag 3 maximumscore 5

De helling is (vanwege symmetrie) het grootst 'halverwege'de minimale en de maximale hoogte, dus bij hoogte 7 m 1

Beschrijven hoe de vergelijking $3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7 = 7$ kan worden opgelost 1

De gezochte waarde van x: (ongeveer) 62,8 (meter) 1

De voorgevel van het gebouw 'begint' bij $x \approx 3{,}4$ (meter) 1

De maximale helling bevindt zich op (ongeveer) 62,8 – 3,4 ≈ 59 meter van de voorgevel 1

Opmerking
Als geen rekening gehouden wordt met het positief of negatief zijn van de helling en zodoende de afstand van het 'dalende' snijpunt met de evenwichtslijn tot de voorgevel berekend wordt, hiervoor geen punten in mindering brengen.

G. Lawaaitrauma (HB1, 2001-1)

vraag 1 maximumscore 5

De groeifactor per 6 jaar is 2 1

De groeifactor per 3 jaar is $2^{\frac{1}{2}}$ 2

$4500 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \approx 6400$ 2

vraag 2 maximumscore 3

Het tekenen van een rechte lijn door bijvoorbeeld (8, 80) en ($\frac{1}{4}$, 95) 3

Opmerking
Als er een foutieve lijn door het punt (8, 80) is getekend, geen punten toekennen.

vraag 3 maximumscore 5

In Amerika is de toegestane geluidssterkte $L = -16{,}6 \cdot \log(6) + 105 \approx 92$ 2

In Europa ligt dit 4 keer 3 dB boven de norm 1

Dus men zou maximaal $\frac{8}{2^4} = \frac{1}{2}$ uur (of 30 minuten) mogen werken 2

of

De formule van de norm voor Europa is $L = -9{,}97 \cdot \log(t) + 89$ 3

In Amerika is bij $t = 6$ de maximaal toegestane geluidssterkte $L \approx 92$ 1

Oplossen van de vergelijking $92 = -9{,}97 \cdot \log(t) + 89$ geeft $t \approx 0{,}5$, dus men mag een $\frac{1}{2}$ uur werken 1

of

Aangeven van $t = 6$ op de horizontale schaal met het bijbehorende punt *P* op de grafiek 2

Tekenen van het punt *Q* op de grafiek van Europa met dezelfde *y*–coördinaat als *P* 2

Aflezen geeft $t \approx 0{,}5$, dus men mag een $\frac{1}{2}$ uur werken 1

Opmerking
Als bij het grafisch oplossen 6 uur midden tussen 4 en 8 uur wordt geplaatst, hiervoor één punt aftrekken.

H. Genius

vraag 1 maximumscore 5

Het aantal tegels met twee dezelfde symbolen is $6 \cdot 5 = 30$ 1

Het aantal tegels met twee verschillende symbolen is $\binom{6}{2}$ of $5+4+3+2+1$ 2

Het aantal tegels met verschillende symbolen is $15 \cdot 6 = 90$ 1

Het antwoord: 120 1

vraag 2 maximumscore 4

In elke poule worden $\frac{4 \cdot 3}{2}$ wedstrijden gespeeld 1

Dat zijn $(4 \cdot 6 =)\ 24$ wedstrijden voor alle poules samen 1

In de ronden daarna worden nog 4, 2 en 1 wedstrijden gespeeld 1

In totaal zijn dat 31 wedstrijden 1

I. Keno

vraag 1 maximumscore 3

$\binom{80}{10}$ of $\frac{80 \cdot 79 \cdot \ldots \cdot 71}{10!}$ 2

Het antwoord ongeveer $1{,}6 \cdot 10^{12}$ 1

Opmerking

Als $80 \cdot 79 \cdot \ldots \cdot 71 \approx 6{,}0 \cdot 10^{18}$ als antwoord is gegeven, 1 punt voor deze vraag toekennen.

vraag 2 maximumscore 4

Het aantal mogelijkheden met 2 goede getallen is $\binom{58}{8} \cdot \binom{22}{2}$ ($\approx 4{,}4 \cdot 10^{11}$) 2

Het aantal mogelijkheden met 0 goede getallen is $\binom{58}{10}$ ($\approx 5{,}2 \cdot 10^{10}$) 1

De eerste uitkomst is ongeveer 8,5 keer zo groot als de tweede uitkomst, dus Fred heeft geen gelijk. 1

vraag 3 maximumscore 5

De aantallen keren dat de 80 getallen getrokken zijn, moeten samen 1126 · 22 = 24 772 zijn 1

Het gebruik van de klassengrenzen 260; …; 350 en 269; …; 359 1

260 · 2 +…+ 350 · 2 = 24 400 en 269 · 2 +…+ 359 · 2 = 25 120 2

24 772 ligt inderdaad tussen de ondergrens 24 400 en de bovengrens 25 120 1

J. Sauna

vraag 1 maximumscore 4

$200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100$ 1

Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1

De oplossing $t \approx 2{,}027$ 1

Het tijdstip 17:02 uur 1

vraag 2 maximumscore 4

De grafiek van S stijgt weliswaar maar dat proces gaat steeds langzamer 1
Daardoor blijven alleen diagram C en diagram D over 1
Omdat (zie vraag 1) de temperatuur blijft stijgen tot even na tijdstip $t = 2$, is er in de periode tussen 2 en 2,5 uur nog een kleine toename van de temperatuur 1
Alleen diagram C blijft dan over 1

vraag 3 maximumscore 4

$S' = -180 \cdot -0,29 \cdot \mathrm{e}^{-0,29t}$ 2
Een uitleg (door het maken van een schets of het geven van een redenering gebaseerd op de formule van S') dat de grafiek van S' voortdurend positief is dus S stijgend is 1
Het inzicht dat S' steeds kleiner wordt (maar wel positief blijft) dus S afnemend stijgend is (dus de conclusie is juist) 1

vraag 4 maximumscore 3

$S'(1) \approx 39,1$ 1
Die 39,1 betekent: als de temperatuur een uur lang met dezelfde snelheid blijft stijgen als hij stijgt op het tijdstip $t = 1$, dan is de temperatuur 39,1 °C gestegen 2

vraag 5 maximumscore 4

Uit $S = 200 - 180 \cdot \mathrm{e}^{-0,29t}$ volgt $180 \cdot \mathrm{e}^{-0,29t} = 200 - S$ 1

$\mathrm{e}^{-0,29t} = \dfrac{200 - S}{180}$ 1

$-0,29t = \ln \dfrac{200 - S}{180}$ 1

$t = \dfrac{\ln \dfrac{200 - S}{180}}{-0,29}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Bijlage 1. Examenprogramma voor wiskunde A vwo

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:
Domein A Vaardigheden
Domein B Algebra en tellen
Domein C Verbanden
Domein D Verandering
Domein E Statistiek en kansrekening
Domein F Keuzeonderwerpen

Het centraal examen
Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C en D in combinatie met de vaardigheden uit domein A.
Het CvE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.
Het CvE maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen
Het schoolexamen heeft tenminste betrekking op domein A en
- domeinen E en F;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden
1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden
2 De kandidaat kan een probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden
3 De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.

Domein B: Algebra en tellen

Subdomein B1: Algebra
4 De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen, daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen en van het werken met haakjes, en beargumenteren waarom de gekozen aanpak werkt.

Subdomein B2: Telproblemen
5 De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.

Domein C: Verbanden

Subdomein C1: Functies

6 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, goniometrische functies, exponentiële functies en logaritmische functies de kenmerken in grafiek, tabel en formule herkennen en gebruiken.

Subdomein C2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

7 De kandidaat kan formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met algebraïsche methoden zonder gebruik van ICT, en daar waar nodig met numerieke of grafische methoden met inzet van ICT, en de uitkomst interpreteren in termen van de context.

Domein D: Verandering

Subdomein D1: Rijen

8 De kandidaat kan het gedrag van een rij herkennen, beschrijven en er berekeningen mee uitvoeren, in het bijzonder in het geval van rekenkundige en meetkundige rijen.

Subdomein D2: Helling

9 De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken of functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met de probleemsituatie.

Subdomein D3: Afgeleide

10 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de afgeleide bepalen, de rekenregels voor het differentiëren gebruiken en aan de hand van de afgeleide het veranderingsgedrag van een functie bestuderen.

Domein E: Statistiek en kansrekening

Subdomein E1: Probleemstelling en onderzoeksontwerp

11 De kandidaat kan bij een probleemstelling die zich leent voor een statistische aanpak een plan maken om antwoord op de probleemstelling te verkrijgen, waarbij geschikte variabelen worden gekozen.

Subdomein E2: Visualisatie van data

12 De kandidaat kan verkregen data verwerken in een geschikte tabel of grafiek en deze op waarde interpreteren.

Subdomein E3: Kwantificering

13 De kandidaat kan de verkregen data samenvatten in voor de probleemstelling geschikte maten en hieraan interpretaties verbinden.

Subdomein E4: Kansbegrip

14 De kandidaat kan het kansbegrip gebruiken om bij een toevalsproces de kans op een bepaalde uitkomst of gebeurtenis te bepalen aan de hand van een diagram, combinatoriek, kansregels en simulatie.

Subdomein E5: Kansverdelingen

15 De kandidaat kan aangeven in welke situatie een toevalsvariabele een bepaalde kansverdeling bezit en van die verdeling de karakteristieken verwachtingswaarde en standaardafwijking hanteren.

Subdomein E6: Verklarende statistiek

16 De kandidaat kan in een probleemsituatie op basis van steekproefgegevens een uitspraak doen over een populatie, de betrouwbaarheid daarvan kwantificeren en het resultaat duiden in termen van de context.

Domein F: Keuzeonderwerpen

Bijlage 2

Overzicht formules wiskunde A vwo

De volgende formules zullen op de binnenpagina van het boekje met de examenopgaven worden afgedrukt.

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Bijlage 3

Voorbeeldexamenopgaven

De voorbeeldexamenopgaven worden in januari 2011 gepubliceerd op cve.nl.