

Examen VWO

2023

tijdvak 1
donderdag 11 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

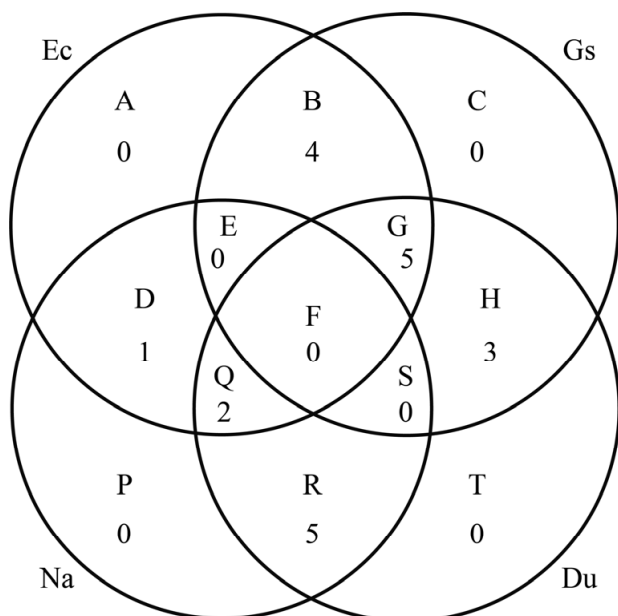
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Toetsrooster

Toen toetsroosters nog met de hand werden gemaakt, gebruikte de roostermaker soms een diagram als hulpmiddel. In de figuur zie je zo'n diagram voor 5 vwo voor de dinsdag in een toetsweek. Op die dinsdag worden alleen toetsen gegeven voor de volgende vakken: economie (Ec), geschiedenis (Gs), natuurkunde (Na) en Duits (Du). In het diagram zijn de gegevens weergegeven voor de 20 leerlingen uit 5 vwo voor deze vier vakken. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat er 5 leerlingen zijn die van deze vier vakken alleen natuurkunde en Duits hebben: gebied R in het diagram.

figuur



Niemand van de 20 leerlingen uit 5 vwo hoeft op dinsdag vier toetsen te maken.

2p 1 Leg uit hoe je dit in het diagram kunt zien.

Voor een roostermaker kan het handig zijn om meer toetsen tegelijkertijd in te roosteren.

2p 2 Onderzoek met behulp van het diagram welke toetsen tegelijkertijd ingeroosterd kunnen worden.

We voeren voor Julia, een leerling uit deze 5 vwo-groep, de volgende notaties in:

- Ec betekent: Julia heeft economie in haar pakket;
- Na betekent: Julia heeft natuurkunde in haar pakket;
- Gs betekent: Julia heeft geschiedenis in haar pakket;
- Du betekent: Julia heeft Duits in haar pakket.

Roostermaker Hansen, die het vakkenpakket van Julia niet kent, beweert het volgende:

$$Du \Rightarrow (Na \vee Gs)$$

- 4p **3** Vertaal deze bewering in een gewone zin en licht met behulp van het diagram toe dat deze bewering juist is.

In het diagram in de figuur zijn verschillende vakkencombinaties door middel van een bijbehorend gebied weergegeven. Er zijn echter meer combinaties mogelijk met twee of meer van de vier vakken economie, geschiedenis, natuurkunde en Duits dan in dit diagram weergegeven zijn. Een leerling met zo'n vakkencombinatie zou dus niet passen in dit diagram. (Gelukkig kwamen deze vakkencombinaties niet voor bij deze 20 leerlingen.)

- 4p **4** Geef alle theoretisch mogelijke combinaties van twee of meer van deze vier vakken en onderzoek voor elke combinatie of deze door middel van een bijbehorend gebied in het diagram weergegeven is.

Ga verder op de volgende pagina.

Vlinders in Nederland

De Vlinderstichting in Nederland houdt jaarlijks vlindertellingen. Er wordt geteld op ruim 800 vaste routes en met een vaste methode.

De tellingen worden gedaan door vrijwilligers, samen met iemand van de Vlinderstichting op een route van maximaal een kilometer lang. Op de vastgestelde route wordt in een vijf meter brede strook het aantal vlinders geteld.

Van een van de vlindersoorten, het bruin zandoogje, blijkt het aantal al jaren min of meer stabiel te zijn.

Een telling op een route van één kilometer leverde 200 bruin zandoogjes op.

bruin zandoogje



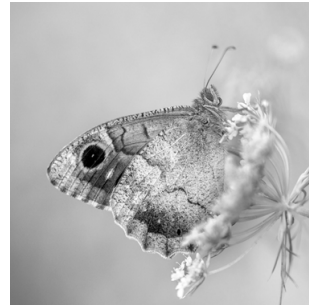
- 2p 5 Bereken in dat geval het gemiddeld aantal bruin zandoogjes per 100 m².

Het aantal bruin zandoogjes is dan wel min of meer stabiel gebleven maar helaas geldt dat niet voor alle vlindersoorten. Het totaal aantal vlinders is in de periode 1992–2017 met 40% afgenomen. Hierbij vermoedt men een exponentiële trend.

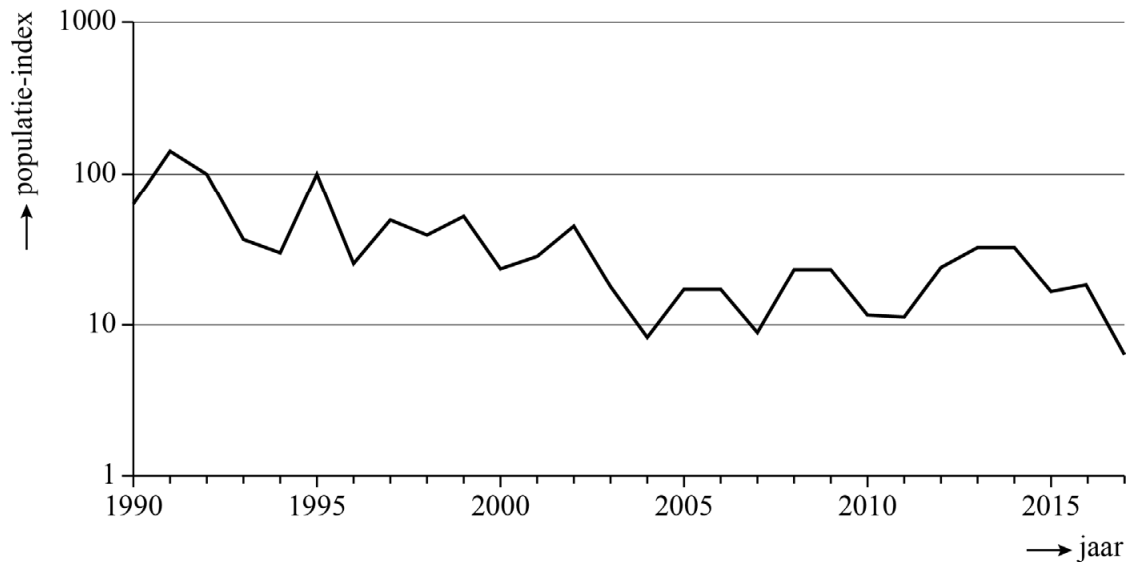
- 4p 6 Bereken de jaarlijkse procentuele afname in deze periode, uitgaande van de exponentiële trend. Geef je antwoord in één decimaal.

De heivlinder is een van de vlindersoorten waarvan het aantal sterk is gedaald. Zie figuur 1.

heivlinder



figuur 1 heivlinders



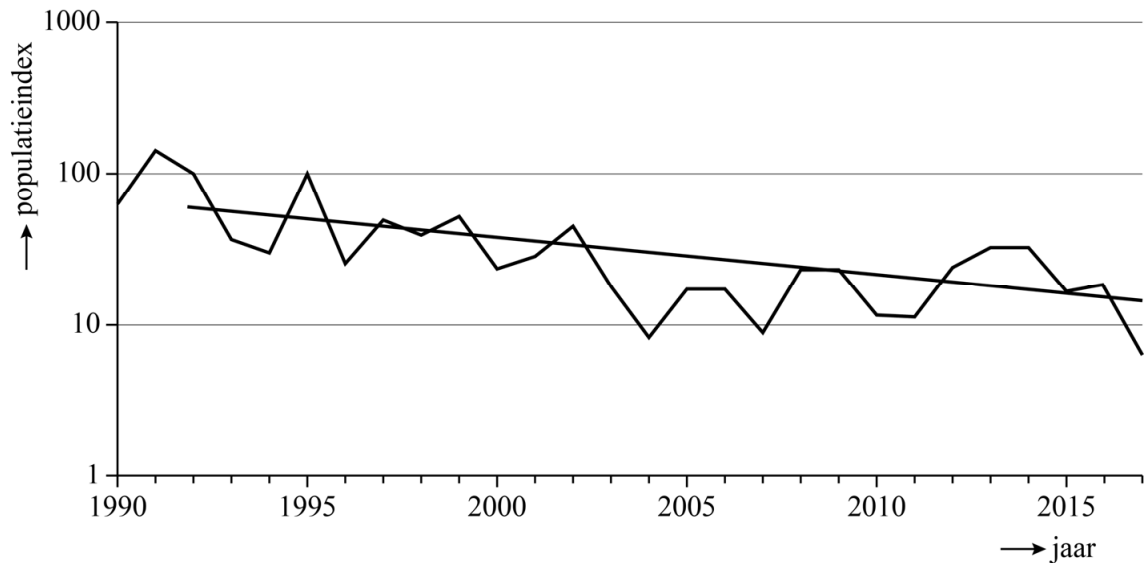
In figuur 1 is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as is niet het aantal heivlinders maar de **populatie-index** weergegeven. Deze index geeft het percentage heivlinders aan ten opzichte van het totaal aantal heivlinders in 1992. De populatie-index van het jaar 1992 is dus 100. In 1995 is de populatie-index weer (ongeveer) 100. Met andere woorden: in 1995 waren er (ongeveer) evenveel heivlinders als in 1992.

Nadat het aantal heivlinders vanaf 2003 stabiel leek en zich in de periode 2011–2013 zelfs wat leek te herstellen, was 2017 weer een rampjaar voor de heivlinder.

- 3p 7 Bereken met behulp van de figuur het percentage heivlinders in 2017 ten opzichte van het aantal heivlinders in 1992. Geef je antwoord in één decimaal.

In figuur 2 zie je dezelfde grafiek als in figuur 1 maar nu is een trendlijn toegevoegd.

figuur 2 heivlinders met trend



De trendlijn in figuur 2 hoort bij een exponentieel model voor de afname van de populatie-index. De trendlijn kan worden beschreven met de volgende formule:

$$\log(P) = -0,026t + 1,8$$

Hierin is P de populatie-index en is t het aantal jaren na 1992.

Als de trend zich op dezelfde manier blijft doorzetten, zal het aantal getelde heivlinders in een gegeven jaar minder dan 2% zijn van het aantal getelde heivlinders in 1992.

- 2p **8** Bereken in welk jaar dat volgens de gegeven formule voor het eerst het geval zal zijn.

De formule $\log(P) = -0,026t + 1,8$ kan worden herleid tot $P = 63 \cdot 0,942^t$ waarmee de populatie-index in een bepaald jaar in één keer kan worden berekend.

- 3p **9** Laat zien hoe de formule $\log(P) = -0,026t + 1,8$ herleid kan worden tot $P = 63 \cdot 0,942^t$.

Engelendeel

Traditioneel gebrouwen whisky wordt enkele jaren in houten vaten opgeslagen om daarin te rijpen. In het algemeen geldt: hoe langer de whisky rijpt, hoe beter hij smaakt. Lang rijpen heeft echter een nadeel: een deel van de whisky gaat verloren doordat deze in het houten vat trekt of verdampt.

Het deel van de whisky dat tijdens het rijpen verloren gaat, wordt het **engelendeel** genoemd. Het engelendeel wordt uitgedrukt in een percentage per jaar.

Van een bepaald soort whisky is het engelendeel 4,5%. Neem aan dat het engelendeel elk jaar hetzelfde percentage is.

- 3p 10 Bereken hoelang het duurt totdat nog maar de helft van de whisky over is. Geef je antwoord in jaren en gehele maanden.

In werkelijkheid is bij traditioneel gebrouwen whisky het engelendeel niet ieder jaar even groot. Zeker aan het begin van de rijpingsperiode is dit deel een stuk groter, doordat de whisky nog in het hout moet trekken.

Pappy Van Winkle 23 is een zeer exclusieve whisky die op traditionele wijze geproduceerd wordt en, zoals de naam al suggereert, 23 jaar in een houten vat rijpt voordat hij in flessen gedaan wordt. Op de website van de producent staat het volgende:

Het rijpingsproces begint met een vat met 200 liter whisky. Het eerste jaar gaat er maar liefst 10% verloren, doordat de whisky in het hout trekt. De 8 jaren erna gaat er 4% per jaar verloren en daarna steeds 3% per jaar. Tenslotte gaat er van het eindproduct ook nog 6 liter verloren bij het vullen van de flessen.

- 4p 11 Pappy Van Winkle 23 wordt verkocht in flessen van 750 ml. Bereken hoeveel van zulke flessen kunnen worden gevuld, uitgaande van 200 liter whisky.

De meeste whisky rijpt tegenwoordig niet meer in houten vaten. In plaats daarvan wordt de whisky in grote metalen ketels gedaan en worden er houtsnippers aan toegevoegd. Hierdoor wordt het engelendeel beperkt tot zo'n 3% per jaar. Voor het vervolg van de opgave gaan we ervan uit dat het engelendeel **ieder jaar** 3% is.

Bij de massaproductie van whisky wordt ervoor gezorgd dat de totale hoeveelheid whisky gelijk blijft door jaarlijks de ketel weer bij te vullen met nieuw geproduceerde whisky. Hierdoor ontstaat er een mengsel dat maar voor een deel uit de oorspronkelijke whisky bestaat.

Bijvoorbeeld: Een ketel bevat 500 liter whisky. Na een jaar is daarvan 3%, dus 15 liter, verloren gegaan. Er wordt aan het eind van dat jaar 15 liter nieuw geproduceerde whisky in de ketel gedaan, zodat er dan 485 liter whisky van 1 jaar oud en 15 liter whisky van 0 jaar oud in zit. Aan het eind van het tweede jaar is er weer 15 liter verloren gegaan en ook dit wordt weer aangevuld met nieuw geproduceerde whisky, enzovoorts.

In de tabel staat voor een aantal jaren de samenstelling van het mengsel **aan het eind van het jaar**, in procenten.

tabel

jaar (n)	leeftijd van de whisky				
	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$
0	100	0	0	0	0
1	97	3	0	0	0
2	94,09	2,91	3	0	0
3	91,27	2,82	2,91	3	0
4	88,53	2,74	2,82	2,91	3
5	85,87

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat aan het eind van het 4e jaar 88,53% van het mengsel bestaat uit 4 jaar oude whisky, 2,74% uit 3 jaar oude whisky, 2,82% uit 2 jaar oude whisky, 2,91% uit 1 jaar oude whisky en 3% uit nieuw geproduceerde whisky (0 jaar oude whisky).

Aan het eind van jaar n is een deel van het mengsel dus n jaar oud. De rest is een mengsel van whisky's van leeftijd 0 jaar tot en met $n-1$ jaar oud. De percentages later toegevoegde whisky's in dat mengsel vormen de rij: 3; 2,91; 2,82; 2,74;

2p **12** Stel een recursieve formule op van deze rij.

4p **13** Bereken hoeveel procent van het mengsel aan het eind van het 7e jaar bestaat uit whisky van 5 jaar of ouder. Geef je antwoord in twee decimalen.

Tot hier

Aan de oever van de Nederrijn bij Rijswijk staat een kunstwerk van Jan Kleingeld bestaande uit letters van staal. Zie de foto. Zoals je ziet, staat elke letter op een voetstuk. De foto is ook vergroot afgebeeld op de uitwerkbijlage.

foto



De tekst TOT HIER duidt aan dat hier zo'n 2000 jaar geleden de noordgrens van het Romeinse rijk lag. De letters zijn inclusief hun voetstuk 365 cm hoog.

- 4p **14** Bereken met behulp van de uitwerkbijlage de hoogte waarop de foto genomen is. Geef je antwoord in gehele cm.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met een perspectieftekening van het woord HIER. De letters hebben een vereenvoudigde vorm en het voetstuk is weggelaten. De letter H ontbreekt nog. De afstand tussen de H en de I is even groot als de afstand tussen de I en de E, en de letter H is ook even breed als deze afstand. De horizontale middenstreep van de letter E zit, net zoals de horizontale middenstreep van de letter H, precies halverwege de totale hoogte van die letter.

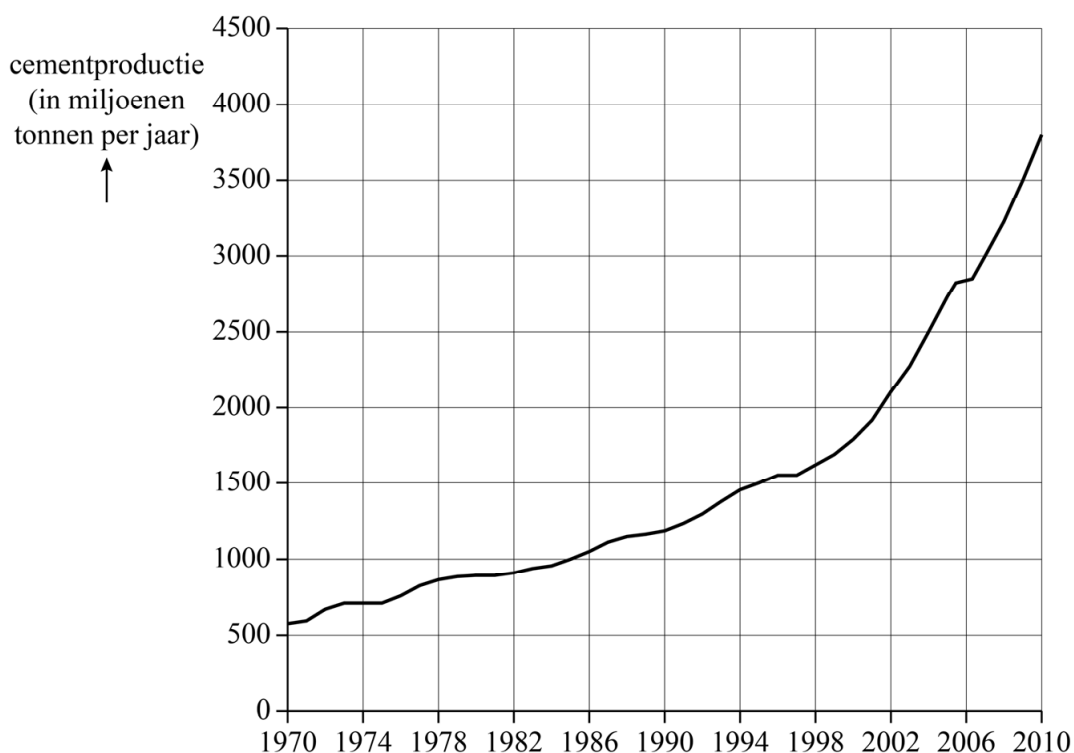
- 4p **15** Teken de letter H op de juiste plaats in de perspectieftekening op de uitwerkbijlage.

Cementproductie

Cement is een belangrijk bouw materiaal. Het wordt voornamelijk gebruikt bij het maken van beton.

In figuur 1 staat de wereldwijde cementproductie tussen 1970 en 2010 in miljoenen tonnen per jaar.

figuur 1



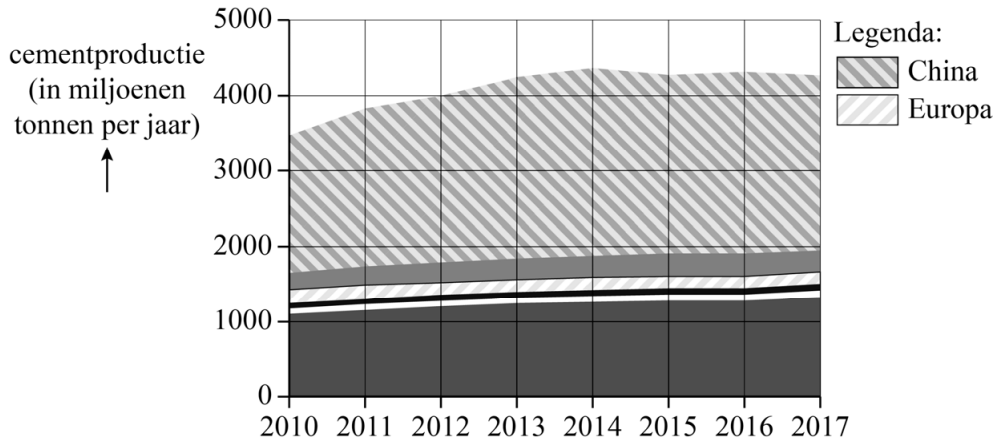
In figuur 1 is te zien dat de cementproductie (ongeveer) exponentieel toenam van 575 miljoen ton in 1970 tot 3800 miljoen ton in 2010.

In 2010 was de verwachting dat de wereldwijde cementproductie ook na 2010 exponentieel door zou blijven stijgen tot ten minste 5000 miljoen ton per jaar. Voor de volgende vraag gaan we van deze verwachting uit.

- 5p **16** Bereken in welk jaar de cementproductie in dat geval voor het eerst meer dan 5000 miljoen ton was.

In werkelijkheid heeft de exponentiële stijging zich niet doorgezet. In de periode 2010-2013 was er nog wel sprake van (niet-exponentiële) toename, maar in de periode 2013-2017 bleef de wereldwijde cementproductie nagenoeg stabiel op 4300 miljoen ton per jaar. Dit is te zien in figuur 2.

figuur 2



Volgens een artikel van de BBC uit 2018 zal de vraag naar beton, en dus ook de productie van cement, na 2017 weer sterk toenemen. Het artikel stelt dat er in 2030 wereldwijd 25% meer cement geproduceerd zal worden dan in 2017.

Neem aan dat de toename na 2017 lineair verloopt.

- 4p 17 Bereken in welk jaar de totale cementproductie in dat geval voor het eerst meer is dan 4500 miljoen ton per jaar volgens het artikel.

Voor de productie van cement is veel energie nodig en bovendien komt er bij het proces behoorlijk wat CO₂ vrij. Volgens het artikel van de BBC wordt 8% van de wereldwijde CO₂-uitstoot veroorzaakt door de productie van cement.

In Europa gelden strenge regels voor de productie van cement. Geschat wordt dat in Europa gemiddeld per ton¹⁾ geproduceerd cement 750 kg aan CO₂ uitgestoten wordt. In China, veruit de grootste producent van cement ter wereld, is deze uitstoot 220 kg per ton geproduceerd cement méér dan in Europa.

Het aandeel van China en dat van Europa in de cementproductie zijn in figuur 2 weergegeven. De grafiek staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage.

- 4p 18 Bereken met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage voor het jaar 2017 hoeveel keer zo groot de CO₂-uitstoot als gevolg van cementproductie in China was ten opzichte van die in Europa. Geef je antwoord in één decimaal.

noot 1 1 ton = 1000 kg

Cement wordt voornamelijk gebruikt bij het maken van beton. Het overgrote deel van de CO₂-uitstoot als gevolg van het maken van beton komt voort uit de productie van cement. Vanwege de enorme CO₂-uitstoot die gepaard gaat met de productie van cement, wordt er volop gezocht naar milieuvriendelijkere alternatieven.

Een van die alternatieven is het maken van beton zonder daarbij cement te gebruiken. Het Nederlandse bedrijf Sqape ontwikkelde een technologie waarmee dat mogelijk is. Volgens de website van Sqape wordt de CO₂-uitstoot zo per ton gemaakt beton verminderd van 750 kg tot 120 kg.

Op de foto zie je een vernieuwd fietspad **foto** in Zeewolde. Het fietspad bestaat voor 70% uit beton dat met de nieuwe technologie van Sqape is gemaakt en voor 30% uit beton waarbij cement is gebruikt.



De hoeveelheid CO₂ die vrijkomt bij het maken van het beton dat voor dit fietspad gebruikt wordt, kan als volgt berekend worden:
 $0,7 \cdot 120 + 0,3 \cdot 750 = 309$ kg per ton gemaakt beton.

Een van de Europese klimaatdoelstellingen is dat de uitstoot van CO₂ als gevolg van het maken van beton wordt verminderd van 750 kg tot 450 kg per ton. Dat kan bereikt worden door een deel van het beton te gaan maken met behulp van de technologie van Sqape.

- 4p **19** Onderzoek met een berekening hoeveel procent van het beton ten minste met deze technologie gemaakt moet worden om aan de genoemde klimaatdoelstelling te voldoen. Geef je antwoord in gehele procenten.

New York Pizza

New York Pizza is een Nederlandse pizzaketen, die in 1993 in Amsterdam is opgericht. New York Pizza is een zogenaamde franchise. Dat wil zeggen dat iedereen die dat wil een New York Pizza-filiaal kan openen. Een ondernemer moet dan elk jaar 6,5% van zijn omzet betalen aan het hoofdkantoor van New York Pizza. Door het betalen van deze zogenaamde **franchise fee** krijgt de ondernemer het recht om het concept van New York Pizza te gebruiken en profiteert hij bovendien van de naamsbekendheid.

In 2017 was de totale omzet van New York Pizza € 99,7 miljoen. Hiervan werd € 23 miljoen gerealiseerd door de groothandel die bij het bedrijf hoort en de rest door de 143 filialen.

- 3p 20 Bereken hoeveel er gemiddeld per maand per filiaal aan franchise fee betaald werd in 2017. Geef je antwoord in hele euro's.

Een van de voordelen van het franchisemodel is dat een ondernemer zelf beslissingen mag nemen binnen bepaalde grenzen. Zo is bijvoorbeeld de menukaart niet bij alle New York Pizza-vestigingen hetzelfde.

Bij een bepaalde vestiging van New York Pizza staan er 32 verschillende pizzavarianten op het menu. Denk daarbij bijvoorbeeld aan een Pizza Hawaii en een Pizza Margherita.

Veel pizza's worden gemaakt op een zogeheten New York Style-bodem, die verkrijgbaar is in vier verschillende maten (20 cm, 25 cm, 30 cm en 35 cm). Ook kan er gekozen worden uit een Italiaanse, een glutenvrije of een biologische bodem, maar van elk van deze drie bodems is er maar één maat beschikbaar (30 cm).

Daarnaast bestaat er de mogelijkheid om van één pizzabodem de beide helften te beleggen met twee verschillende varianten van het menu: de zogeheten **double tasty**.

- 3p 21 Bereken hoeveel verschillende pizza's er bij dit filiaal samengesteld kunnen worden.

In 2018 was een van de meest verkochte bodems de 25 cm New York Style. Volgens de website van New York Pizza is deze pizza goed voor één persoon. De grootste pizzabodem, de 35 cm New York Style, is volgens de website goed voor één à twee personen.

Als je met drie personen pizza gaat eten, dan kun je bijvoorbeeld kiezen uit óf twee pizza's met een diameter van 35 cm óf drie pizza's met een diameter van 25 cm.

Een pizza met een diameter van 25 cm kostte € 8,99 in 2018 en een pizza met een diameter van 35 cm kostte toen € 15,49.

Arie deed in 2018 twee uitspraken:

- A: De totale hoeveelheid pizza bij de keuze voor twee grote pizza's is groter dan bij de keuze voor drie kleine pizza's.
- B: De prijs per cm^2 is bij de keuze voor twee grote pizza's hoger dan bij de keuze voor drie kleine pizza's.

5p 22 Onderzoek van elk van beide uitspraken of deze waar is.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.