



College voor Toetsen en Examens

WISKUNDE B HAVO

SYLLABUS CENTRAAL EXAMEN 2022

Versie 2, juli 2020

© 2020 College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo, Utrecht.

Alle rechten voorbehouden. Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Inhoud

	Voorwoord	3
1	Inleiding	4
1.1	Wiskunde B in de tweede fase	4
1.2	Het centraal examen wiskunde B	4
1.3	Domeinindeling	4
2	Specificaties	5
2.1	Toelichting op de specificaties	5
2.1.1	Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden	5
2.1.2	Nauwkeurigheid en afronden	5
2.1.3	Voorbeeldopgaven en examenopgaven	5
2.1.4	Algebraïsche vaardigheden	6
2.1.5	ICT	6
2.2	Specificaties	7
Bijlage 1	Examenprogramma	15
Bijlage 2	Examenwerkwoorden	18
Bijlage 3	Begrippenlijst	20
Bijlage 4	Algebraïsche vaardigheden	26
Bijlage 5	De correctie van de centrale examens wiskunde	31

Voorwoord

De minister heeft de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In het examenprogramma zijn de exameneenheden aangewezen waarover het centraal examen (CE) zich uitstrekt: het CE-deel van het examenprogramma. Het examenprogramma geldt tot nader order.

Het College voor Toetsen en Examens (CvTE) geeft in een syllabus, die in beginsel jaarlijks verschijnt, een toelichting op het CE-deel van het examenprogramma. Behalve een beschrijving van de exameneisen voor een centraal examen kan de syllabus verdere informatie over het centraal examen bevatten, bijvoorbeeld over een of meer van de volgende onderwerpen: specificaties van examenstof, begrippenlijsten, bekend veronderstelde onderdelen van domeinen of exameneenheden die verplicht zijn op het schoolexamen, bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw, bijzondere vormen van examinering (zoals computerexamens), voorbeeldopgaven, toelichting op de vraagstelling, toegestane hulpmiddelen.

Ten aanzien van de syllabus is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar zijn aard is een syllabus dus niet een volledig gesloten en afgebakende beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen in het verlengde daarvan ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholingsinstanties. De syllabus is niet van belang voor het schoolexamen. Daarvoor zijn door de SLO handreikingen geproduceerd die niet in deze uitgave zijn opgenomen.

Deze syllabus geldt voor het examenjaar 2022. Syllabi van eerdere jaren zijn niet meer geldig en kunnen van deze versie afwijken. Voor het examenjaar 2023 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld.

Het CvTE publiceert uitsluitend digitale versies van de syllabi. Dit gebeurt via Examenblad.nl (www.examenblad.nl), de officiële website voor de examens in het voortgezet onderwijs.

Een syllabus kan zo nodig ook tussentijds worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekendgemaakt worden. Kijkt u voor alle zekerheid jaarlijks in september op Examenblad.nl. Wijzigingen ten opzichte van de vorige syllabus worden duidelijk zichtbaar gemaakt. Inhoudelijke wijzigingen zijn geel gemarkeerd. Het is ook mogelijk dat een syllabus geen inhoudelijke veranderingen heeft ondergaan.

Voor opmerkingen over syllabi houdt het CvTE zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan info@cvte.nl.

De voorzitter van het College voor Toetsen en Examens,
Drs. P.J.J. Hendrikse

1 Inleiding

1.1 Wiskunde B in de tweede fase

Het vak wiskunde B is een verplicht profielvak in het profiel Natuur en Techniek. In de profielen Natuur en Gezondheid, Economie en Maatschappij en Cultuur en Maatschappij is wiskunde B een keuze-examenvak. Het is mogelijk wiskunde B te kiezen als extra vak naast wiskunde A.¹

De omvang van het vak wiskunde B is voor het havo 360 SLU. Hiervan beslaat het in deze syllabus gespecificeerde CE-deel 100%.

1.2 Het centraal examen wiskunde B

In bijlage 2 is een lijst opgenomen van de specifieke betekenissen van de in het centraal examen gebruikte examenwerkwoorden voor alle wiskundevakken havo/vwo met een centraal examen. Deze lijst is niet uitputtend.

In bijlage 6 van deze syllabus wordt informatie gegeven over de correctie van de centrale examens wiskunde havo en vwo.

1.3 Domeinindeling

Het examenprogramma staat in bijlage 1. Het betreft hier het programma met globale eindtermen, waarvan het CE-deel in hoofdstuk 2 van deze syllabus wordt gespecificeerd. Het SE-deel is nader gespecificeerd in een [handreiking](#) van SLO. In de handreiking zijn suggesties opgenomen voor het SE-deel welke dus niet bindend zijn.

In de onderstaande tabel staat vermeld welke domeinen in het CE geëxamineerd kunnen worden:

Domein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	X	X	
B Functies, grafieken en vergelijkingen	X		X
C Meetkundige berekeningen	X		X
D Toegepaste analyse	X	X	

¹ Voor meer informatie omtrent de procedure zie document 'Veelgestelde vragen aan examenloket'.

2 Specificaties

2.1 Toelichting op de specificaties

2.1.1 *Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden*

Bij de specificatie van de globale eindtermen is onderscheid gemaakt tussen parate vaardigheden en productieve vaardigheden. Bovendien is bij een aantal subdomeinen opgenomen over welke parate kennis de kandidaat dient te beschikken. Deze indeling is bedoeld om aan te geven wat het verwachte kennis- en beheersingsniveau van de kandidaat is.

Met parate vaardigheden wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat routinematig moet beheersen.

Bij productieve vaardigheden is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.

Bij parate kennis gaat het om kennis waarover de kandidaat dient te beschikken en die niet uit de formuleringen van de parate en/of productieve vaardigheden blijkt. De opsomming van parate kennis is daarmee een aanvulling op de parate en productieve vaardigheden. Parate kennis die bij een subdomein wordt genoemd, kan ook bij andere subdomeinen voorkomen en wordt dan ook binnen het totale CE-deel van het examenprogramma als parate kennis beschouwd.

In bijlage 3 staat voor de verschillende wiskundevakken een overzicht van de wiskundige begrippen die bekend verondersteld worden bij het centraal examen. De begrippen die in dit overzicht aangegeven worden kunnen zonder toelichting worden gebruikt in het centraal examen. Dit overzicht is niet uitputtend.

2.1.2 *Nauwkeurigheid en afronden*

Als in een examenopgave niet vermeld is in welke nauwkeurigheid het antwoord gegeven dient te worden, dient de kandidaat die nauwkeurigheid uit de probleemsituatie af te leiden. Het kiezen van een passende maateenheid valt hieronder. Als de probleemsituatie dit toelaat, mag een nauwkeuriger antwoord gegeven worden dan de nauwkeurigheid die de kandidaat uit de probleemsituatie afgeleid zou kunnen hebben. Het correctievoorschrift geeft hier uitsluitel over.

Een kandidaat kan uit de probleemsituatie afleiden wanneer afronden volgens de gebruikelijke afrondingsregels (6,4 wordt 6 en 6,5 wordt 7) niet van toepassing is. Een kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en dient hiernaar te handelen.

2.1.3 *Voorbeeldopgaven en examenopgaven*

De volgende opgaven kunnen gebruikt worden als voorbeeldmateriaal voor toekomstige examens:

- Examens die zijn afgenomen vanaf 2017
- Pilotexamens die zijn afgenomen voor 2017
- Voorbeeld(examen)opgaven die in de syllabus 2017 te vinden zijn.

2.1.4 *Algebraïsche vaardigheden*

Bij de specificaties is ervan uitgegaan dat de kandidaten bekend zijn met de vereiste algebraïsche vaardigheden. Voor alle wiskundevakken havo/vwo met een centraal examen wordt een overzicht van deze algebraïsche vaardigheden gegeven in bijlage 4. Hoewel bij het samenstellen van dit overzicht de grootst mogelijke nauwkeurigheid is nagestreefd, kan niet gegarandeerd worden dat deze uitputtend is.

2.1.5 *ICT*

In het CE wordt met ICT de grafische rekenmachine bedoeld. Zie hiervoor te zijner tijd de Mededeling Hulpmiddelen en Regeling toegestane hulpmiddelen.

2.2 Specificaties

Domein A Vaardigheden

Subdomein A1 Algemene vaardigheden

De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan

1. doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken;
2. adequaat schriftelijk rapporteren over onderwerpen uit de wiskunde.

Subdomein A2 Profielspecifieke vaardigheden

De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

De kandidaat kan

1. een probleemsituatie in een wiskundige, natuurwetenschappelijke of maatschappelijke context analyseren, gebruik makend van relevante begrippen en theorie vertalen in een vakspecifiek onderzoek, dat onderzoek uitvoeren, en uit de onderzoeksresultaten conclusies trekken;
2. een realistisch probleem in een context analyseren, inperken tot een hanteerbaar probleem, vertalen naar een wiskundig model, modeluitkomsten genereren en interpreteren en het model toetsen en beoordelen;
3. met gegevens van wiskundige en natuurwetenschappelijke aard consistente redeneringen opzetten.

Subdomein A3 Wiskundige vaardigheden

De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige denkactiviteiten, waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

De kandidaat

1. beheerst de rekenregels;
2. beheerst de specifieke algebraïsche vaardigheden;
3. heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren;
4. kan wiskundige informatie ordenen en in probleemsituaties de wiskundige structuur onderkennen;
5. kan bij een gegeven probleemsituatie een model opstellen in wiskundige termen;
6. kan op basis van een gegeven probleemsituatie een schatting maken van de uitkomst zonder deze uitkomst exact te berekenen;
7. kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren binnen de context;
8. kan vakspecifieke taal interpreteren en gebruiken;
9. kan de correctheid van wiskundige redeneringen verifiëren;
10. kan eenvoudige wiskundige redeneringen correct onder woorden brengen;

11. kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij het geven van wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen.
12. kan antwoorden afronden op een voorgeschreven nauwkeurigheid dan wel op een nauwkeurigheid die past bij de probleemsituatie.²

Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen

Subdomein B1 Standaardfuncties

De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen en werken met eenvoudige transformaties.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de lineaire of eerstegraadsfunctie $f(x) = ax + b$, evenals de naam lijn voor de grafiek ervan;
- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de kwadratische of tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ of $f(x) = a(x - p)(x - q)$ of $f(x) = a(x - r)^2 + s$ evenals de naam parabool voor de grafiek ervan;
- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de machtsfunctie $f(x) = x^p$, p is een rationaal getal, in het bijzonder van de wortelfunctie $f(x) = \sqrt{x}$;
- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de exponentiële functie $f(x) = a^x$ en de logaritmische functie $f(x) = {}^a \log(x)$, evenals de begrippen grondtal en exponent en de rekenregels voor machten en logaritmen;
- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de goniometrische functies $f(x) = \sin(x)$ en $f(x) = \cos(x)$, evenals de begrippen radiaal, periode, amplitude en evenwichtsstand;
- de grafiek en karakteristieke eigenschappen van de gebroken lineaire functie $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, evenals de naam hyperbool voor de grafiek ervan;
- de karakteristieke eigenschappen van functies: domein, bereik, nulpunt, extreem, minimum, maximum, stijgen, dalen, toenemend of afnemend stijgen of dalen;
- de karakteristieke eigenschappen van grafieken: snijpunt met de x -as, snijpunt met de y -as, top, symmetrie en asymptotisch gedrag inclusief horizontale en verticale asymptoot;
- de transformaties vermenigvuldiging ten opzichte van x - of y -as en translatie.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. van de standaardfuncties de grafiek tekenen en daarbij gebruik maken van de karakteristieke eigenschappen van de functie en haar grafiek;

² Zie de toelichting in paragraaf 2.1.2.

2. de verschillende schrijfwijzen van tweedegraads functies gebruiken;
3. bij een grafiek of een tabel van een standaardfunctie, een lineaire functie of een kwadratische functie het functievoorschrift opstellen;
4. karakteristieke eigenschappen van een standaardfunctie en haar grafiek gebruiken bij het oplossen van problemen;
5. een exponentiële functie beschrijven met behulp van de termen beginwaarde en groeifactor;
6. bij exponentiële en logaritmische functies x schrijven als functie van y ;
7. bij machtsfuncties x schrijven als functie van y ;
8. op een grafiek een translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van x - of y -as uitvoeren;
9. het functievoorschrift opstellen dat hoort bij een nieuwe grafiek die is ontstaan na transformatie van een gegeven grafiek;
10. het functievoorschrift opstellen van de somfunctie of de verschilfunctie van twee functies.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

11. bij exponentiële groeiprocessen de verdubbelingstijd en de halveringstijd bepalen;
12. twee functies samenstellen door middel van een ketting en het functievoorschrift opstellen van de samengestelde functie;
13. van een samengestelde functie de karakteristieke eigenschappen bepalen;
14. bij een in een probleemsituatie beschreven verband een passend functievoorschrift opstellen;
15. x uitdrukken in y bij een samengestelde functie als bedoeld in B1.12.

Subdomein B2 Vergelijkingen en ongelijkheden

De kandidaat kan vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen, in voorkomende gevallen grafisch oplossen of de oplossingen numeriek benaderen en de oplossingen interpreteren in de context.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip stelsel van vergelijkingen;
- de abc-formule.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot een lineaire vergelijking;
2. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot een kwadratische vergelijking;
3. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot het type $x^n = c$;
4. een vergelijking oplossen die te herleiden is tot het type $a^x = c$ of ${}^a\log(x) = c$;
5. een vergelijking oplossen van het type $f(x) = g(x)$ waarbij f en g functies zijn zoals genoemd in subdomein B1;
6. een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden oplossen;

7. een ongelijkheid oplossen van het type $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ of $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ waarbij f en g standaardfuncties zijn.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

8. een vergelijking dan wel een ongelijkheid opstellen aan de hand van een gegeven probleemsituatie, de vergelijking of ongelijkheid oplossen en de oplossingen van deze vergelijking of ongelijkheid interpreteren;
9. een vergelijking met een parameter oplossen en de oplossing schrijven als functie van de parameter;
10. een ongelijkheid oplossen van de vorm $f(x) < c$, $f(x) \leq c$ of $f(x) > c$, $f(x) \geq c$, waarbij f een samengestelde functie is zoals bedoeld in B1.12.

Subdomein B3 Evenredigheidsverbanden

De kandidaat kan verbanden tussen de twee grootheden a en b van de vorm $a = c \cdot b^d$ herkennen, toepassen en bijbehorende grafieken tekenen, vanuit de beschrijving van een dergelijk verband een formule opstellen, de evenredigheidsconstante bepalen en kan rekenen met en redeneren over verbanden van deze vorm en het effect van schaalvergroting.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de begrippen recht evenredig, omgekeerd evenredig, evenredig met een macht, evenredigheidsconstante;
- het verschil tussen een lineair verband en een recht evenredig verband;
- formules van de vorm $y = cx$ en $y = \frac{c}{x}$ als respectievelijk een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. in een gegeven probleemsituatie bepalen of er sprake is van een recht evenredig of een omgekeerd evenredig verband;
2. met de algemene vorm van het machtsverband $y = c \cdot x^n$ rekenen;
3. in een machtsverband $y = c \cdot x^n$ tussen twee grootheden x en y de exponent n en de evenredigheidsconstante c bepalen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

4. in een gegeven probleemsituatie een vergelijking opstellen waarbij gebruik wordt gemaakt van het machtsverband tussen twee grootheden, de vergelijking oplossen en de oplossingen interpreteren.

Subdomein B4 Periodieke functies

De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van sinus- of cosinusfuncties, de bijbehorende sinusoiden tekenen en de karakteristieke

eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een goniometrische vergelijking op een gegeven interval bepalen.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de exacte waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ waarbij x een veelvoud van $\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$ is.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. graden omrekenen in radialen en omgekeerd;
2. de grafiek tekenen van functies van de vorm $f(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c))$ en $f(x) = d + a \cdot \cos(b(x - c))$;
3. vergelijkingen van het type $f(x) = c$ oplossen in een gegeven interval met f een functie als in B4.2. genoemd en daarbij gebruik maken van periodiciteit en symmetrie;
4. van een sinusoïde het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

5. in een gegeven probleemsituatie voor een periodiek verschijnsel een functievoorschrift zoals bedoeld in B4.2 opstellen, daarmee berekeningen uitvoeren en de resultaten interpreteren.

Domein C Meetkundige berekeningen

Opmerking 1:

Dit domein betreft de meetkunde in het platte vlak. De ruimte kan wel als context optreden waarin de vlakke meetkunde zich voordoet.

Opmerking 2:

Als in dit domein coördinaten worden gebruikt, dan betreft dat altijd een cartesisch assenstelsel.

Subdomein C1 Afstanden en hoeken in concrete situaties

De kandidaat kan afstanden en hoeken berekenen met behulp van goniometrische verhoudingen, de stelling van Pythagoras en de sinus- en cosinusregel.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip afstand als de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen twee meetkundige figuren.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het berekenen van de grootte van hoeken en de lengte van zijden in een rechthoekige driehoek;
2. de stelling van Pythagoras gebruiken om de afstand tussen twee punten te berekenen;

- de sinus- en cosinusregel gebruiken voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken in een driehoek;
- met gelijkvormigheid de lengte van lijnstukken berekenen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- voor het oplossen van een meetkundig probleem een combinatie gebruiken van C1.1 tot en met C1.4.

Subdomein C2 Algebraïsche methoden

De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren aan de hand van contexten en figuren.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de vergelijking van een lijn in de vorm $y = ax + b$ en in de vorm $ax + by = c$;
- de eigenschap dat het product van de richtingscoëfficiënten van twee loodrecht op elkaar staande lijnen gelijk is aan -1 en omgekeerd;
- van een cirkel een vergelijking in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$;
- de stelling dat een raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

- de vergelijking van een lijn en een cirkel opstellen;
- de hoek tussen twee lijnen berekenen;
- de vergelijking van de loodlijn door een gegeven punt op een lijn opstellen;
- uit een vergelijking van een cirkel de straal en de coördinaten van het middelpunt afleiden;
- de vergelijking van de raaklijn aan een cirkel opstellen in een gegeven raakpunt;
- de coördinaten van het snijpunt van twee lijnen berekenen;
- de oplosbaarheid van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in verband brengen met de onderlinge ligging van de bijbehorende lijnen;
- in een coördinatenstelsel de lengte van een lijnstuk berekenen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- de coördinaten van de snijpunten van een lijn en een cirkel berekenen;
- de afstand tussen punten, lijnen en cirkels berekenen;
- onderzoeken hoeveel gemeenschappelijke punten een lijn en een cirkel hebben.

Domein D Toegepaste analyse

Subdomein D1 Veranderingen

De kandidaat kan het veranderingsgedrag van een functie, gegeven door grafiek, tabel of formule, beschrijven door middel van toenamediagrammen en differentiequotiënten en kan differentiequotiënten berekenen en interpreteren, ook vanuit een profielspecifieke probleemsituatie.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip interval en de intervalnotaties;
- de Δ -notatie voor een differentie.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. vanuit een gegeven toenamediagram het verloop van een grafiek schetsen;
2. een toenamediagram bij een gegeven grafiek, tabel of formule tekenen;
3. differentiequotiënten berekenen indien de functie is gegeven door een grafiek, tabel of formule;
4. differentiequotiënten interpreteren als maat voor de gemiddelde verandering in de waarde van een functie op een interval.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

5. het veranderingsgedrag van variabelen beschrijven met behulp van toenamediagrammen en differentiequotiënten.

Subdomein D2 Afgeleide functies

De kandidaat kan de afgeleide functie begripsmatig interpreteren en kan lokale veranderingen van functiewaarden benaderen zowel met een differentiaalquotiënt als met een numeriek-grafische methode.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- notaties voor de afgeleide van een functie.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. een lokale afgeleide benaderen door differentiequotiënten met afnemende intervalgrootte;
2. een lokale afgeleide interpreteren als de helling of steilheid van een grafiek in een punt.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

3. de grafiek van de afgeleide schetsen indien de grafiek van de functie is gegeven;
4. de grafiek van de functie schetsen indien de grafiek van de afgeleide is gegeven;

- conclusies trekken over lokale veranderingen van functiewaarden op basis van de afgeleide of met behulp van een numeriek-grafische methode.

Subdomein D3 Bepaling afgeleide functies

De kandidaat kan de afgeleide functie van machtsfuncties met rationale exponenten bepalen en kan voor het bepalen van de afgeleide functie gebruik maken van de som-, verschil- en kettingregel.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het begrip differentiëren voor het bepalen van de afgeleide.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

- de afgeleide bepalen van machtsfuncties met rationale exponenten;
- de somregel en verschilregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide;
- de kettingregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide van een samengestelde functie, waarvan de eerste functie lineair is en de tweede functie een machtsfunctie met rationale exponent;
- het verband gebruiken tussen de afgeleide van een functie $f(x)$ en de afgeleide van $c \cdot f(x) + d$ of de afgeleide van $f(c \cdot x + d)$.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- een combinatie van somregel, verschilregel en kettingregel gebruiken bij het bepalen van de afgeleide.

Subdomein D4 Toepassing afgeleide functies

De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren gericht op profielspecifieke contexten.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

- de afgeleide gebruiken bij het opstellen van de vergelijking van de raaklijn in een punt van de grafiek van een functie;
- de afgeleide gebruiken bij het verifiëren en bij het bepalen van extremen van een functie;
- de afgeleide gebruiken bij het bepalen van een raaklijn met een gegeven helling.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

- in een gegeven probleemsituatie de afgeleide gebruiken voor het bepalen van een optimale situatie;
- een optimaliseringsprobleem vertalen in een formule en dit probleem vervolgens met behulp van de afgeleide of numeriek-grafisch oplossen.

Bijlage 1 Examenprogramma

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

- Domein A Vaardigheden
- Domein B Functies, grafieken en vergelijkingen
- Domein C Meetkundige berekeningen
- Domein D Toegepaste analyse

Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C en D in combinatie met de vaardigheden uit domein A.

Het CvTE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

Het CvTE maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en:

- domein D;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

1. De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

2. De kandidaat kan profielspecifieke probleemsituaties in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

3. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige denkactiviteiten – waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

Domein B: Functies, grafieken en vergelijkingen

Subdomein B1: Standaardfuncties

4. De kandidaat kan standaardfuncties (machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies en goniometrische functies) hanteren, interpreteren binnen een context, de grafieken beschrijven en in een functievoorschrift vastleggen en werken met eenvoudige transformaties.

Subdomein B2: Vergelijkingen en ongelijkheden

5. De kandidaat kan vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels van twee lineaire vergelijkingen oplossen, in voorkomende gevallen grafisch oplossen of de oplossingen numeriek benaderen en de oplossingen interpreteren in de context.

Subdomein B3: Evenredigheidsverbanden

6. De kandidaat kan verbanden tussen de twee grootheden a en b van de vorm $a = c \cdot b^d$ herkennen, toepassen en bijbehorende grafieken tekenen, vanuit de beschrijving van een dergelijk verband een formule opstellen, de evenredigheidsconstante bepalen en kan rekenen met en redeneren over verbanden van deze vorm en het effect van schaalvergroting.

Subdomein B4: Periodieke functies

7. De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van sinus- of cosinusfuncties, de bijbehorende sinusoiden tekenen en de karakteristieke eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een goniometrische vergelijking op een gegeven interval bepalen.

Domein C: Meetkundige berekeningen

Subdomein C1: Afstanden en hoeken in concrete situaties

8. De kandidaat kan afstanden en hoeken berekenen met behulp van goniometrische verhoudingen, de stelling van Pythagoras en de sinus- en cosinusregel.

Subdomein C2: Algebraïsche methoden

9. De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren aan de hand van contexten en figuren.

Domein D: Toegepaste analyse

Subdomein D1: Veranderingen

10. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van een functie, gegeven door grafiek, tabel of formule, beschrijven door middel van toenamedigrammen en differentiequotiënten en kan differentiequotiënten berekenen en interpreteren, ook vanuit een profielspecifieke probleemsituatie.

Subdomein D2: Afgeleide functies

11. De kandidaat kan de afgeleide functie begripsmatig interpreteren en kan lokale veranderingen van functiewaarden benaderen zowel met een differentiaalquotiënt als met een numeriek-grafische methode.

Subdomein D3: Bepaling afgeleide functies

12. De kandidaat kan de afgeleide functie van machtsfuncties met rationale exponenten bepalen en kan voor het bepalen van de afgeleide functie gebruik maken van de som-, verschil- en kettingregel.

Subdomein D4: Toepassing afgeleide functies

13. De kandidaat kan analytisch-algebraïsche berekeningen uitvoeren gericht op profielspecifieke contexten.

Bijlage 2 Examenwerkwoorden

Er is een gecombineerde lijst voor examenwerkwoorden opgesteld voor natuur- en wiskunde. Er is gestreefd naar maximale afstemming en overlap. De complete lijst voor wis- en natuurkunde is omstreeks maart 2017 in een nieuwsbericht gepubliceerd op Examenblad.nl.

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde. Als in een wiskunde-examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

	Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.
	<i>Alleen voor wiskunde B geldt:</i> de toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van beantwoorden.
Algebraïsch / op algebraïsche wijze (<i>alleen wiskunde B</i>)	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze (<i>alleen wiskunde B</i>)	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. ----- <i>*Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid $5/x < x$ exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid $5/x = x$ exact wordt opgelost. De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.</i>
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat) (<i>alleen wiskunde B</i>)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt

Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

Bijlage 3 Begrippenlijst

De in deze lijst opgenomen begrippen worden bij de kandidaten van het betreffende centraal examen wiskunde bekend verondersteld. Zij kunnen zonder nadere toelichting in examenvragen worden gebruikt.

In deze lijst zijn die wiskundige begrippen opgenoemd die vermeld zijn onder de parate kennis bij de specificaties of voortvloeien uit de parate en productieve vaardigheden. Deze lijst met begrippen is niet uitputtend. Zo zijn begrippen die als voorkennis worden beschouwd, niet opgenomen.

Bij de *standaardfuncties* moet de kandidaat de *karakteristieke* eigenschappen kennen. Bij wiskunde A havo en wiskunde C vwo wordt in het examen niet over 'functies' maar over 'verbanden' gesproken, de functienotaties $x \rightarrow \dots$ of $f(x) = \dots$ worden hier ook niet gebruikt.

In onderstaande tabel dient voor wiskunde A havo en wiskunde C vwo dan ook overal voor 'functies' 'verbanden' te worden gelezen.

Functies/verbanden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	variabele	x	x	x	x	x
	grootte, eenheid		x			x
	absoluut, relatief	x		x	x	
	karakteristieke eigenschappen van een functie		x			x
	domein		x			x
	bereik		x			x
	nulpunt		x			x
	extreem, extreme waarde		x		x	x
	maximum(waarde)	x	x	x	x	x
	minimum(waarde)	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) stijgen	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) dalen	x	x	x	x	x
	karakteristieke eigenschappen van een grafiek		x			x
	snijpunt(en) met x - en y -as	x	x	x	x	x
	top		x	x	x	x
	buigpunt					x
	randpunt		x			x
	symmetrie		x			x
	asymptotisch gedrag	x^1	x	x^1	x^1	x
	verticale en horizontale asymptoot		x			x^2
	scheve asymptoot					x^2
	standaardfuncties	x	x		x	x
	lineaire (of eerstegraads) functies	x	x	x	x	x
	richtingscoëfficiënt	x	x	x	x	x
	kwadratische (of tweedegraads) functies		x	x	x	x

¹ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

² Deze begrippen ook in relatie met limieten

	havo		vwo		
	wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
parabool		x			x
machtsfuncties		x	x	x	x
wortelfuncties		x			x
exponentiële functies	x	x	x	x	x
grondtal	x	x		x	x
exponent	x	x	x	x	x
beginwaarde	x	x	x	x	x
groefactor	x	x	x	x	x
groepercentage	x	x	x	x	x
halveringstijd	x	x	x	x	x
verdubbelingstijd	x	x	x	x	x
logaritmische functies		x	x	x	x
logaritme		x	x	x	x
natuurlijke logaritme				x	x
logaritmische schaalverdeling	x		x	x	
goniometrische functies		x		x^3	x
sinusoïde		x			x
radiaal		x			x
periodiek verschijnsel		x	x	x	x
periode		x	x	x	x
frequentie					x
trillingstijd					x
amplitude		x	x	x	x
evenwichtsstand		x		x	x
evenwichtswaarde			x		
sinusmodel					x
harmonische trilling					x
som-, verschil en verdubbelingsformules					x
gebroken lineaire functies		x			x
hyperbool		x			x
absolute-waarde-functies					x
vergelijkingen en ongelijkheden	x	x	x	x	x
lineaire of eerstegraadsvergelijking	x	x	x	x	x
kwadratische of tweedegraadsvergelijking		x			x
abc-formule		x			x
(lineair) interpoleren en extrapoleren	x		x	x	
trend			x		
somfunctie		x	x^4	x^4	x
verschilfunctie		x	x^4	x^4	x
productfunctie			x^4	x^4	x

³ Alleen de sinusfunctie

⁴ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

	havo		vwo		
	wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
			x^5	x^5	x
		x	x^5	x^5	x
		x^5			x
		x			x
		x			x
		x		x	x
		x			x
				x	
	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x
		x			x
		x			x
					x
					x
					x
		x			x
Meetkunde			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
		x	x		x
			x		x
			x		
			x		
		x			x
		x	x		x
			x		
			x		
		x			x
		x			x
					x
					x
					x
					x
					x
					x

⁵ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	lengte, richtingshoek, kentallen, componenten van een vector					x
	inproduct van twee vectoren					x
	vectorvoorstelling van een lijn, steunvector, richtingsvector					x
	zwaartepunt					x
	middelloodlijn					x
	bissectrice (deellijn)					x
Veranderingen	interval		x	x	x	x
	intervalnotaties		x			x
	de Δ -notatie voor een differentie		x			x
	differentiequotiënt		x		x	*
	gemiddelde verandering		x	x	x	
	toenamediaagram		x		x	
	helling		x	x	x	x
	steilheid		x			x
	hellinggrafiek				x	
	rijen, inclusief notaties			x	x	
	rekenkundige rij				x	
	meetkundige rij				x	
	somrij				x	
	Σ -teken				x	
	directe formule			x	x	
	recursieve formule			x	x	
Differentiaal- en integraalrekening	afgeleide (functie), inclusief notaties		x		x	x
	tweede afgeleide, inclusief notaties					x
	somregel en verschilregel		x		x	x
	productregel				x	x
	quotiëntregel				x	x
	kettingregel		x		x	x
	raaklijn		x		x	x
	integraal, integrand, primitieve					x
	omwentelingslichaam					x
	(baan)snelheid, (baan)versnelling					x
Statistiek	betrouwbaarheid, betrouwbaarheidsinterval	x				
	centrummaat, centrum	x				
	gemiddelde	x				
	mediaan	x				
	modus, modaal	x				
	data	x				
	discreet	x				
	continu	x				
	kwantitatief	x				
	kwalitatief	x				
	nominaal	x				

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	ordinaal	x				
	absoluut	x				
	relatief	x				
	frequentie	x				
	groepen	x				
	kenmerk	x				
	klasse, klassenindeling	x				
	verdeling	x				
	klokvormig	x				
	meertoppig	x				
	uniform	x				
	scheef	x				
	staart	x				
	uitschieter	x				
	normale verdeling	x				
	de drie vuistregels van de normale verdeling	x				
	populatie	x				
	populatiegemiddelde	x				
	populatieproportie	x				
	representatie / presentatie	x				
	dotplot	x				
	staafdiagram	x				
	cirkeldiagram	x				
	steelbladdiagram	x				
	lijndiagram	x				
	(cumulatief / relatief) frequentiepolygoon	x				
	boxplot	x				
	(cumulatieve) frequentietabel	x				
	kruistabel	x				
	puntenwolk, spreidingsdiagram	x				
	spreidingsmaat, spreiding	x				
	interkwartielafstand	x				
	standaardafwijking	x				
	spreidingsbreedte	x				
	steekproef	x				
	aselect	x				
	representatief	x				
	steekproefomvang	x				
	steekproevenverdeling	x				
	steekproefgemiddelde	x				
	steekproefproportie	x				
Combinatoriek	boomdiagram			x	x	
	wegendiagram			x	x	
	rooster			x	x	
	permutaties			x	x	

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	combinaties			x	x	
	driehoek van Pascal			x		
Logisch redeneren	Venn-diagram			x		
	nodige, voldoende voorwaarde			x		
	contradictie			x		
	paradox			x		
	als-dan-redenering			x		
	hier-uit-volgt-conclusie			x		
	tegenvoorbeeld			x		

Bijlage 4 Algebraïsche vaardigheden

In deze bijlage worden de eisen wat betreft algebraïsche vaardigheden beschreven voor alle wiskundevakken met een centraal examen. Algebraïsche vaardigheden zijn geen doel op zichzelf, maar onderdeel van wiskundige activiteiten. De algebraïsche vaardigheden moeten in samenhang met het betreffende programma worden gelezen. Door algebraïsche expressies te bewerken kan bijvoorbeeld de juistheid van beweringen worden aangetoond, het rekenwerk worden vereenvoudigd of vergelijkingen zo herschreven worden dat ze exact zijn op te lossen. Deze algebraïsche vaardigheden zijn onderverdeeld in specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.

Bij *specifieke* algebraïsche vaardigheden gaat het om parate kennis en het vlot kunnen toepassen van de bijbehorende vaardigheden op de voorkomende algebraïsche expressies. Deze vaardigheden hebben betrekking op algoritmisch werken en algebraïsch rekenen. Het gaat hier bijvoorbeeld om kennis en gebruik van rekenregels, inclusief het werken met haakjes, bij het invullen van getallen of variabelen in een expressie en het gebruik van algoritmen om een vergelijking op te lossen.

Bij *algemene* algebraïsche vaardigheden spelen aspecten als aanpak, globale strategie, het herkennen van structuren en methoden, en doelgerichtheid een rol. De kandidaten moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, moeten kwalitatief kunnen redeneren aan de hand van een formule (zoals stijgen/dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag), moeten een formule kunnen opstellen door het generaliseren van getallenvoorbeelden of het combineren van bekende formules, moeten verbanden zien tussen de verschillende representaties van een functie en moeten kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en betekenis toekennen aan de variabelen en parameters.

Samenvattend zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de kandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de kandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen.

Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) reeds bekend verondersteld mag worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.

Op de plaats van A , B , C en D in de volgende tabellen kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $ax + b$, $\frac{a}{x}$ en x^2 .

Niet aan de orde komen de regels die horen bij het differentiëren.

De vaardigheden genoemd bij categorieën A t/m D moeten in beide richtingen kunnen worden uitgevoerd, tenzij anders is vermeld.

Beperkende voorwaarden zoals bijvoorbeeld noemers van breuken zijn ongelijk 0, worden niet vermeld.

Hoewel bij het samenstellen van de kruisjeslijst met de algebraïsche vaardigheden de grootst mogelijke nauwkeurigheid is nagestreefd, kan niet gegarandeerd worden dat deze volledig is.

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
A. Breukvormen	1. $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{A}{B} + C = \frac{A + BC}{B}$	x	x	x	x	x
	3. $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{\frac{A}{B}}{C} = \frac{A \cdot C}{B}$	x	x	x	x	x
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$	x	x	x	x	x
	2. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	x	x	x	x	x
C. Bijzondere producten	1. haakjes wegwerken en ontbinden in factoren: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	2. $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	3. $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$		x			x
	4. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$		x			x
	5. kwadraat afsplitsen: $x^2 + px + q$ schrijven in de vorm $(x + r)^2 + s$		x			x

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
D. Machten en logaritmen	1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	x	x	x	x	x
	3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	x	x	x	x	x
	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	x	x	x	x	x
	6. $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ met p positief en geheel		x	x	x	x
	7. ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$		x		x	x
	8. ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$		x		x	x
	9. ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$		x		x	x
	10. ${}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}$		x	x	x	x
	vwo C: alleen $p = 10$					
11. ${}^g\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$				x	x	
E. Goniometrie	voor formules zie betreffende domein		x			x
F. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A tot en met D	1. via substitutie van getallen	x	x	x	x	x
	2. via substitutie van expressies	x	x	x	x	x
	3. via het omwerken van formules	x	x	x	x	x
G. Vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen en formules herleiden (voor wiA en wiC worden deze vaardigheden uitsluitend gebruikt voor het herleiden van formules)	1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ of $B = 0$		x	x		x
	2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0$ of $B = C$ havo A, vwo A en vwo C: $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \Rightarrow B = C$	x	x	x	x	x
	3. $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B$ of $A = -B$		x		x	x
	6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$	x	x	x	x	x

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
H. Algoritmen t.b.v. het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules (voor wiA en wiC worden deze vaardigheden uitsluitend gebruikt voor het herleiden van formules)	1. eerstegraadsvergelijkingen $ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c-b}{a}$	x	x	x	x	x
	2. tweedegraadsvergelijkingen abc-formule $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		x			x
	3. $x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$ als n oneven is $x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$ of $x = -c^{\frac{1}{n}}$ als n even is		x	x	x	x
	4. $g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log(a)$		x	x	x	x
	5. $e^x = a \Rightarrow x = \ln(a)$				x	x
	6. ${}^g\log(x) = b \Rightarrow x = g^b$		x	x	x	x
	7. $\ln(x) = b \Rightarrow x = e^b$				x	x
	8. $ x = c \Rightarrow x = c$ of $x = -c$					x
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties	1. $f(A) = c$		x			x
	2. $f(A) = f(B)$		x			x
J. Vergelijkingen en ongelijkheden van het type $f(x) = g(x)$ resp. $f(x) \geq g(x)$ oplossen	1. grafisch, waaronder ICT	x	x	x	x	x
	2. vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch dan wel exact, indien algebraïsch/exact oplosbaar		x			x

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
Algemene vaardigheden						
K. Formules opstellen	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfuncties					
	a. eerstegraads/lineaire functie	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfunctie		x		x	x
	c. exponentiële functie	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functie		x		x	x
	e. goniometrische functie		x		x ¹	x
	f. machtsfunctie		x		x	x
	g. absolute waarde functie					x
	3. door generaliseren via getallenvoorbeelden	x	x	x	x	x
4. door schakelen van formules	x	x	x	x	x	
L. Expressies herkennen	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	a. eerstegraads/lineaire functies	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfuncties		x	x	x	x
	c. exponentiële functies	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functies		x	x	x	x
	e. goniometrische functies		x		x ¹	x
	f. machtsfuncties		x	x	x	x
	2. structuur van een expressie vaststellen	x	x	x	x	x
	3. rol van een voorkomende parameter bepalen	x	x		x	x
	M. Karakteristieken bepalen	kwalitatief redeneren over expressies of delen daarvan met betrekking tot karakteristieken als				
a. uiterste waarden		x	x	x	x	x
b. stijgen of dalen		x	x	x	x	x
c. asymptotisch gedrag		x	x	x	x	x
N. Algebraïsche expressies reduceren en representeren	1. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan	x	x	x	x	x
	2. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren		x			x
	3. flexibel verschillende representaties van functies (formule, tabel, grafiek) kunnen inzetten en tussen deze representaties kunnen wisselen	x	x	x	x	x

¹ alleen de sinusfunctie

Bijlage 5 De correctie van de centrale examens wiskunde

Op de volgende pagina's treft u de eerder in Euclides en op Examenblad gepubliceerde artikelen 'Gelijke monniken, gelijke kappen' (2014) en 'Nieuwe vakspecifieke regel over afronden voor wiskunde A, B en C havo en vwo' (2016). De artikelen gaan over de correctie van de centrale examens wiskunde havo en vwo. In de artikelen worden voorbeelden gebruikt. Enkele voorbeelden zijn echter achterhaald als gevolg van wijzigingen in de examenprogramma's (zoals een voorbeeld over kansrekening).

GELIJKE MONNIKEN, GELIJKE KAPPEN

Kenneth Tjon Soei Sjoë
Peter Kop
Marjolein van Haselen
Donald van As

Dit artikel is tot stand gekomen in samenspraak met Cito en het College voor Toetsen en Examens (CvTE). Het artikel heeft betrekking op de beoordeling van de examens wiskunde A en C. Aan het einde van het artikel wordt de situatie bij wiskunde B beschreven.

Hoewel de examenmakers van wiskunde A en C ervan uitgaan dat alle docenten hun leerlingen leren hun antwoorden wiskundig correct te formuleren, doen hun pupillen dat niet altijd op examens. Uit onder andere de discussies op het forum blijkt dat correctoren fouten in formuleringen soms verschillend beoordelen. Deze verschillen komen ook voor bij het beoordelen van afronden en het gebruik van eenheden, het beschrijven hoe de grafische rekenmachine (de GR) gebruikt is en bij het zogenoemde sprokkelen. Ons doel met dit artikel is om meer helderheid te verschaffen waardoor de verschillen in beoordeling van leerlingenwerk worden verkleind. Alle leerlingen verdienen een gelijkwaardige beoordeling van het CE (Centraal examen).

Een belangrijk uitgangspunt dat in dit stuk meespeelt bij de beoordeling van wiskundig incorrecte formuleringen bij wiskunde A- en C-leerlingen is dat het bij hen gaat om het kunnen gebruiken van wiskunde bij het oplossen van problemen in betekenisvolle contexten. Het wiskundig correct formuleren speelt daarbij een minder belangrijke rol. Vanuit dit perspectief past het de cruciale denkstappen in de redeneringen en berekeningen van de leerling te belonen en incorrecte wiskundige formuleringen niet altijd aan te rekenen. In de correctievoorschriften bij de CE's van wiskunde A en C staan vanaf 2015 drie vakspecifieke regels. Regel 1 en 3 zijn weliswaar niet nieuw, maar worden met ingang van 2015 enigszins aangepast.

Vakspecifieke regels bij wiskunde A/C vwo en wiskunde A havo:

1. Voor elke rekenfout wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
2. Als de kandidaat bij de beantwoording van een vraag een notatiefout heeft gemaakt en als gezien kan worden dat dit verder geen invloed op het eindantwoord heeft, wordt hiervoor geen scorepunt in mindering gebracht.
3. De algemene regel 3.6 *geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR gebruikt hebben.

* Indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt danwel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven.

In dit artikel willen wij als de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C onze ideeën met betrekking tot de interpretatie van deze regels en het correctievoorschrift verduidelijken. Vooraf merken we op dat het correctievoorschrift altijd bindend is. Toch stellen we vast dat er ruimte is voor verschillen in interpretatie. Het blijkt ondoenlijk om bij het formuleren van correctievoorschriften 'alles dicht te timmeren'. Door middel van gerichte voorbeelden wil het CvTE aangeven hoe de correctievoorschriften bedoeld zijn; met andere woorden: wat 'de geest' is waarin het CE gecorrigeerd zou moeten worden. We zullen de afzonderlijke onderwerpen (notatiefouten, afronden, gebruik van eenheden, GR-gebruik beschrijven en sprokkelen) apart toelichten aan de hand van voorbeelden met begeleidend commentaar. Het moge duidelijk zijn dat dit slechts een illustratie is en dat de voorbeelden niet uitputtend zijn.

Notatiefouten

Doel van wiskunde A en C is onder andere dat leerlingen (wiskundige) problemen oplossen en hun oplossing onderbouwen. Correct kunnen formuleren is belangrijk en dient door leerlingen beheerst te worden. Deze leerlingen worden echter niet opgeleid om actief wiskundige notaties te kunnen gebruiken. Een passief gebruik van deze vaardigheid is voldoende. Daarom zijn wij van oordeel dat fouten in wiskundige notaties bij deze leerlingen niet altijd aangerekend moeten worden op het CE; notatiefouten in aanloop naar in essentie volledig juiste antwoorden kunnen zeker geaccepteerd worden. In niet volledig juiste antwoorden zal het soms lastig zijn om te bepalen of de leerling slechts een notatiefout maakt of dat hij een foutieve gedachtegang volgt. Uitgangspunt is dat er geen scorepunten in mindering gebracht moeten worden, als een leerling een notatiefout gemaakt heeft bij de beantwoording van een vraag, terwijl gezien kan worden dat hij correct gehandeld heeft bij de daaropvolgende stappen.

De volgende passages in het leerlingenwerk moeten, hoewel onjuist genoteerd, geen puntenaftrek tot gevolg hebben:

$$1. \quad y = \frac{x^2 - 2x}{2x+1}; \quad y' = \frac{(2x+1)(2x-2) - x^2 - 2x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2 - 2x^2 + 4x}{(2x+1)^2};$$

De leerling verzuimt haakjes te zetten na het tweede '-' teken in de teller van de afgeleide, maar laat in de laatste breuk zien dat hij wel rekent alsof er haakjes staan en daardoor de juiste teller krijgt.

2. De leerling moet het verband geven tussen L en T ($L = 2T$); de leerling noteert echter '2T' of ' $y = 2x$ ' en werkt verder correct met het verband $L = 2T$.

Een bijzondere notatiefout die aanleiding geeft tot discussie tussen correctoren is het 'breien'. Onderstaande voorbeelden van leerlingteksten geven aan dat de specifieke notatiefout 'breien' geen aanleiding is tot scorepuntenaftrek:

3. Een leerling moet opschrijven: $0,27 \cdot 0,13 \cdot 0,11 \cdot 0,09 = 0,0003$ dus 0,03%, maar schrijft $0,27 \cdot 0,13 = 0,03511 \cdot 0,11 = 0,00386 \cdot 0,09 = 0,0003 = 0,03\%$.

4. Moet opschrijven: $g = 9,6^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{9,6} = 1,06$ dus 6%, maar schrijft: $g = 9,6^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{9,6} = 1,06 = 6\%$

5. Moet in de berekening de afgeleide van $\frac{10}{x}$ uitrekenen en schrijft: $y' = \frac{10}{x} = 10x^{-1} = -10x^{-2}$;

hij schrijft dus in de tussenstappen een vergelijking op waarbij functie en afgeleide gelijk zouden zijn.

Zoals eerder aangegeven is de achterliggende gedachte dat, 'als gezien kan worden dat de notatiefout verder geen invloed heeft op het eindantwoord', deze niet aangerekend moet worden. Indien dit niet zichtbaar is, zal wel puntenaftrek moeten volgen.

6. Als de afgeleide van $y = \frac{10}{x}$ berekend moet worden

en in het correctievoorschrift is aangegeven dat dit 1 scorepunt waard is, maar de leerling slechts

$$\text{als eindantwoord } y = \frac{10}{x} = 10x^{-1} = -10x^{-2}$$

opgeschreven heeft, dan kan dit scorepunt hier niet gegeven worden omdat onduidelijk is of de leerling inderdaad de afgeleide berekend heeft. Hier gaat het om een eindantwoord dus er is geen vervolg waaruit blijkt dat bedoeld is: $y' = -10x^{-2}$.

Afronden

Uit de syllabus blijkt dat leerlingen geen kennis van significantie hoeven te hebben. Daarom zal er in het algemeen genoeg worden genomen met antwoorden die nauwkeuriger zijn. Er zijn echter enige situaties waarin wel eisen worden gesteld aan de nauwkeurigheid van het antwoord. Soms is voorgeschreven hoe nauwkeurig het antwoord gegeven moet worden (bijvoorbeeld bij 'Rond je antwoord af op honderdtallen' of 'Bereken in 2 decimalen nauwkeurig ...'). In deze gevallen is het duidelijk dat als niet voldaan wordt aan dit voorschrift er scorepuntenaftrek plaatsvindt.

Indien echter geen nauwkeurigheid van het antwoord voorgeschreven is, bepaalt vaak de context de nauwkeurigheid. Een geldbedrag voor een *afzonderlijk* product kan bijvoorbeeld wel 23,15 euro zijn (of 23 euro) maar niet 23,1467 euro. Het aantal personen in een autobus moet geheel zijn en niet 53,7. Hier dwingt de context tot afronden op twee decimalen, respectievelijk gehelen. Ook hier moet(en) er (een) scorepunt(en) in mindering gebracht worden, als de kandidaat het antwoord niet met de juiste nauwkeurigheid gegeven heeft.

Een bijzondere situatie doet zich voor bij vragen waarbij er naar boven (of naar beneden) móet worden afgerond. In dit soort situaties kan 'gewoon' afronden leiden tot een situatie waarin niet aan het gestelde voldaan is.

1. In het examen vwo wiskunde A 2013 tijdvak 1 vraag 19 is gevraagd: hoe ver moet een atlete *ten minste* springen om een bepaald aantal punten te halen.

Daarvoor moet deze vergelijking

$$3827 = 0,188807(X - 210)^{1,41}$$

met de GR opgelost worden: dat geeft een waarde voor X van

1343,696267 (cm) en dus als antwoord 13,44 meter.

Antwoorden als 13,437 meter of 13,436963 meter zijn ook goed omdat die naar boven zijn afgerond, maar

een antwoord als 13,43696 meter is fout omdat hier

naar beneden is afgerond, ondanks de toevoeging

(of nauwkeuriger) in het correctievoorschrift (CV).

De vraagstelling (*ten minste*) dwingt hier dat er 'naar

boven afgerond' moet worden, ongeacht de gekozen

nauwkeurigheid

2. Nog duidelijker is als bijvoorbeeld de vergelijking

$$2770 = 0,188807(X - 210)^{1,41}$$

opgelost had moeten worden waarbij de vraagstelling dezelfde was als

hierboven. Dan is een juist antwoord 1112 (de GR

geeft 1111,44111); het antwoord 1111 is niet juist en

zal geen scorepunten opleveren aangezien er naar

boven afgerond moest worden.

Soms zal een leerling moeten aangeven dat zijn antwoord afwijkt van triviale uitkomsten. Bij kansrekening zal de leerling bijvoorbeeld duidelijk moeten aangeven dat zijn antwoord afwijkt van 0 of 1 en bij exponentiële functies dat de groeifactor afwijkt van 1. Indien geen afronding is

voorgeschreven, zal een kans van $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ dus als meest

onnauwkeurige antwoord 0,0001 hebben en niet 0,000. Bij berekeningen met exponentiële functies zal een afronding van 1,0043 naar 1,00 of een afronding van 0,0002 naar 0,000 niet aanvaardbaar zijn. Als uit de context blijkt dat de berekeningen en antwoorden overdreven nauwkeurig maar niet fout zijn, zal dat niet tot scorepuntenaftrek moeten leiden, hoewel we hopen dat in het onderwijs afwegingen met betrekking tot afronding aan bod komen.

1. Bij een vraag naar het jaarlijkse groeipercentage in een situatie waarbij het aantal van 1000 tot 9600 groeit in een periode van 42 jaar, kan een leerling een antwoord geven als 5,5327877%.
2. Een kans ter grootte van $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ zou wellicht afgerond

genoteerd kunnen worden als 0,4822530864.

In beide voorbeelden zijn de antwoorden overdreven nauwkeurig, maar niet fout, gezien de context en leiden daarmee dus niet tot scorepuntenaftrek.

Gebruik van eenheden

Met betrekking tot het gebruik van eenheden zullen we hier drie gevallen bespreken:

1. Indien in de vraag de eenheid vermeld wordt, hoeft deze niet in het antwoord herhaald te worden. Bijvoorbeeld bij een vraag als: Bereken hoeveel ton ...; dan zal in het correctievoorschrift (CV) de eenheid tussen haakjes staan (in dit geval 89.000 (ton)) en dus moet het antwoord 89.000 goed worden gerekend. Merk op dat antwoorden als 8.900.000 of 8.900.000 kg fout zijn en dus tot aftrek van scorepunten leiden. De vraag was immers: hoeveel ton!
2. Indien in de stam slechts één bepaalde eenheid gebruikt wordt en er geen eenheid in de vraag vermeld wordt, dan hoeft de eenheid niet in het antwoord herhaald te worden. Bijvoorbeeld: in havo wis A 2013 I vraag 18 staat slechts de eenheid 'cm'. In de vraag wordt geen eenheid vermeld. In het CV staat de eenheid tussen haakjes. Die mag dus in het antwoord weggelaten worden, omdat er geen misverstand kan bestaan over de bedoelde eenheid (6,1 (cm)). Als de leerling in het antwoord een andere eenheid gebruikt, moet deze vermeld worden. Bij de genoemde vraag is naast 6,1 (cm) dan ook 0,061 meter (natuurlijk) goed, maar 0,061 niet.
3. Indien in de stam meerdere eenheden worden gebruikt en in de vraag geen eenheid wordt vermeld, moet het antwoord met een eenheid worden gegeven.

Wiskunde B

- Bij 'Vakspecifieke regels bij wiskunde A/C vwo en wiskunde A havo'

Voor wiskunde B geldt

1. Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
 2. De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.
- Bij 'Notatiefouten'
Bij een wiskunde B-examen moet de leerling blijken antwoorden en bewijsvoeringen door middel van een zorgvuldig gebruik van notaties, symboliek en een heldere redeneertrant verkregen te hebben. Daarom geldt de nieuwe vakspecifieke regel m.b.t. notatiefouten, zoals geformuleerd voor wiskunde A/C, niet voor wiskunde B. Bij wiskunde B dienen notatiefouten (verschrijvingen) dus aangerekend te worden zoals beschreven in vakspecifieke regel 1.
 - Bij 'Afronden'
Voor wiskunde B geldt t.a.v. het afronden hetzelfde als bij wiskunde A/C.
 - Bij 'Gebruik van eenheden'
Voor wiskunde B geldt t.a.v. het gebruik van eenheden hetzelfde als bij wiskunde A/C.
 - Bij 'Beschrijving van het gebruik van de GR'
Voor wiskunde B geldt t.a.v. de beschrijving van het gebruik van de GR hetzelfde als bij wiskunde A/C.
 - Bij 'Sprokkelen'
Voor wiskunde B geldt t.a.v. sprokkelen hetzelfde als bij wiskunde A/C, met als toevoeging bij III:
T.a.v. opgaven in de VWO-examens waarin een bewijsvoering wordt gevraagd, kunnen slechts scorepunten worden toegekend als de kandidaat de logische volgorde van de stappen in de bewijsvoering heeft aangehouden.

Beschrijving van het gebruik van de GR

De bovengenoemde vakspecifieke regel 3 vertelt dat de kandidaat toe moet lichten hoe hij de GR gebruikt. Sinds enige tijd gebruiken we in het CV de omschrijving 'beschrijven hoe ... opgelost kan worden met GR'. De laatste jaren verdwijnt in veel gevallen zelfs de toevoeging 'met de GR' en staat er bijvoorbeeld in het CV bij het oplossen van vergelijkingen slechts 'beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden'. Vaak gaan we er dan wel vanuit dat de GR ingezet zal worden. Langzamerhand lijkt de GR een vanzelfsprekend stuk gereedschap voor leerlingen te zijn geworden. Dat brengt met zich mee dat de uitgebreide omschrijvingen hoe de GR ingezet kan worden achterwege kunnen blijven. Een verwijzing als

'equa' (bij Casio) of 'solver' of 'snijpunt grafieken' (bij TI) lijkt voldoende. Bij de normale verdeling is *Ncd* (Casio) of *normalcdf* (TI) voldoende. Dit des te meer omdat deze onderdelen van het antwoord in het algemeen niet meer dan 1 punt waard zijn. Algemeen blijft gelden dat een leerling zijn antwoorden moet toelichten en dat hij dus globaal moet beschrijven hoe hij de GR gebruikt en dus niet kan volstaan met de verwijzing 'met de GR'.

Sprokkelen

Onder sprokkelen verstaan we het oneigenlijk toekennen/vergaren van scorepunten. Het bolletjesmodel dient op de volgende wijze gebruikt te worden om sprokkelen te voorkomen én om er voor te zorgen dat kandidaten geen punten onthouden worden waar zij recht op hebben.

- I. Als een leerling een vraag goed beantwoordt en voldoende toelichting geeft, krijgt hij alle scorepunten voor de betreffende vraag. De onderverdeling van de scorepunten in het CV is niet van belang.
- II. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een kleine (reken)fout maakt, *dan wordt hier conform vakspecifieke regel 1 een scorepunt voor in mindering gebracht, tenzij het bolletjesmodel anders aangeeft.*
- III. Als een leerling ergens halverwege afhaakt in een oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, wordt de onderverdeling (het bolletjesmodel) gebruikt om vast te stellen hoeveel scorepunten een leerling verdient heeft. Het bolletjesmodel geeft dus het aantal scorepunten 'indien je niet verder komt dan hier, krijg je ... scorepunten'
- IV. Als een leerling zonder enige onderbouwing een aanname doet om daarmee antwoord te kunnen geven op de vraag zullen na de aanname voor dit onderdeel in het algemeen geen verdere scorepunten worden toegekend. (Zie V. en voorbeeld 1 hieronder.)
- V. Als een leerling ergens in het oplossingsproces dat in het CV beschreven wordt, een fundamentele fout (bijvoorbeeld een verkeerd model) of een grote rekenfout maakt, waardoor de vraag (essentieel) verandert, dan helpt het bolletjesmodel van het CV om vast te stellen hoeveel punten de leerling tot dan toe behaald heeft. Voor het deel dat na de fundamentele fout komt, moet gekeken worden of het probleem niet te sterk vereenvoudigd wordt (zie voorbeeld 3 hieronder) en of er verder gewerkt wordt in de geest van de oplossing van het probleem; er moeten vergelijkbare handelingen worden verricht. De beoordeling geschiedt verder op vakinhoudelijke argumenten (zie voorbeeld 4 hieronder). Als na de fundamentele fout slechts

het antwoord volgt, kunnen geen scorepunten meer worden toegekend (zie voorbeeld 2).

We schetsen een aantal voorbeelden waarin duidelijk aan te geven is 'hoe te handelen', maar realiseren ons dat dit steeds per situatie bekeken moet worden. Voorbeelden waarbij geen punten meer toegekend moeten worden:

1. Uit vwo wiskunde C 2013 tijdvak 1 pilot vraag 1: hier wordt gevraagd of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten. Om de toenames (de percentages) te berekenen, moet er een aantal stappen gezet worden. Een leerling voert geen enkele berekening uit, maar doet een aanname en schrijft slechts op 'stel dat de toename bij armen en handen 21% is en die bij benen en voeten 25%; dan zou het aandeel van benen en voeten relatief het meest zijn toegenomen'. Het laatste punt van het CV (dus het aandeel van de lichaamsoppervlakte van benen en voeten is relatief het meest toegenomen) wordt niet toegekend. In dit voorbeeld wordt de probleemstelling van de context niet gebruikt, maar wordt er slechts op basis van aannames, los van de context, een variant van een regel van het correctievoorschrift opgeschreven. Honoreren hiervan zou sprokkelen zijn en dus mogen er na de aannames geen scorepunten meer worden toegekend.

Voorbeelden bij fundamentele fouten.

2. Stel, de volgende vraag wordt gesteld: iemand zet 10000 euro op een spaarrekening waar jaarlijks 5% rente op wordt vergoed. Volgens hem betekent dit dat het ingezette bedrag na 20 jaar precies is verdubbeld. Ga met een berekening na of deze bewering klopt. De leerling zou als antwoord moeten geven: Het bedrag na 20 jaar is $10000 \cdot 1,05^{20} = 26533$ (2 punten). Dit is meer dan 2 maal 10.000, dus de bewering is onjuist (1 punt). Hij schrijft: '5% per jaar is gelijk aan $20 \cdot 5\% = 100\%$ in 20 jaar. Het bedrag is na 20 jaar dus 20000, dus de bewering is juist.' Het laatste punt mag hier nu niet toegekend worden, dus deze leerling krijgt geen punten voor deze vraag.
3. Er wordt gevraagd aan te tonen dat de afgeleide van

$$L = \frac{4T - 30}{T + 2} \text{ steeds positief is. Het CV geeft voor}$$

$$L' = \frac{38}{(T + 2)^2} \text{ 2 punten en voor de redenering 'teller}$$

en noemer zijn positief dus L' is positief' 1 punt. Een

leerling die opschrijft dat $L' = \frac{4}{1} = 4$ en dat dus

L' positief is, krijgt geen punten. Ook het laatste punt kan na de fundamentele fout niet gegeven worden.

**'CORRECT KUNNEN FORMULEREN IS
BELANGRIJK EN DIENT DOOR LEERLINGEN
BEHEERST TE WORDEN'**

4. In vwo wiskunde A 2012 tijdvak 1 pilot was vraag 19 de korte onderzoeksvraag met 8 punten. De vraag was: 'Onderzoek, uitgaande van bovengenoemde trendmatige ontwikkelingen, in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan de totale appelopbrengst'.
- op basis van de gegevens moeten voor zowel appels als peren lineaire formules gemaakt worden voor de *opbrengst per hectare per jaar* en voor de *totale oppervlakte in hectare*. (Stappen 1 en 2 in het CV);
 - hierna moet voor zowel appels als peren een formule voor de *totale opbrengst per jaar* gemaakt worden. (Stappen 3 en 4 in het CV);
 - daarna moet onderzocht worden in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter is dan de totale appelopbrengst. (Stappen 5 tot en met 8 in het CV).

Als een leerling in de stappen 1 tot en met 4 een fundamentele fout maakt en met exponentiële formules (in plaats van lineaire formules) werkt, moet de rest van de uitwerking op wiskundig inhoudelijke argumenten beoordeeld worden. Als de leerling nu vervolgens zonder fouten verder doorwerkt, zal hij nog een aantal scorepunten kunnen krijgen, omdat verder gewerkt is in de geest van de vraag en er geen verregaande vereenvoudiging opgetreden is. Dus ondanks de fundamentele fout in het begin is er geen sprake van sprokkelen als er voor de vervolgstappen nog punten worden toegekend. Met deze voorbeelden zijn de problemen van beoordelen niet opgelost. In een aantal gevallen zal het lastig blijven om te beoordelen of het bolletjesmodel van het CV gevolgd kan worden of dat er sprake is van sprokkelen.

Tot slot

We hebben voor wiskundige notaties, afronden, het gebruik van eenheden, beschrijving van de GR en sprokkelen, door middel van voorbeelden geschetst in welke situaties wel en in welke geen scorepunten gegeven kunnen worden, indien het CV hier geen uitspraak over doet. Met deze voorbeelden zijn de problemen van beoordelen niet opgelost. Helemaal eenduidig kan het CV niet altijd zijn. Ons doel met dit artikel is om meer helderheid te verschaffen waardoor de verschillen in beoordeling van leerlingenwerk worden verkleind.

NIEUWE VAKSPECIFIEKE REGEL OVER AFRONDEN VOOR WISKUNDE A, B EN C HAVO EN VWO

De afgelopen jaren heeft het CvTE herhaaldelijk signalen uit het veld ontvangen waaruit blijkt dat niet altijd duidelijk is hoe om te gaan met tussentijds afronden en het noteren van tussenantwoorden. Om deze onduidelijkheid zoveel mogelijk weg te nemen heeft het CvTE een nieuwe vakspecifieke regel over het tussentijds afronden opgesteld.

Nieuwe vakspecifieke regel (af rondregel)

- Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.
- Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.
- (alleen voor wiskunde A en C)
De aftrek voor fouten zoals bedoeld onder a. en/of fouten bij het afronden van het eindantwoord bedraagt voor het hele examen maximaal 2 scorepunten.

De hieronder staande vakspecifieke regel over het afronden van groeifactoren en kansen, die in de septembermededelingen van 2015 is gepubliceerd voor de examens havo A en vwo A en C blijft gehandhaafd: *Als een groeifactor of kans wordt gevraagd, geldt voor het eindantwoord: groeifactoren moeten worden genoteerd in minstens twee decimalen en kansen moeten worden genoteerd in minstens twee decimalen of hele procenten. Meer decimalen zijn vereist als het nodig is om af te wijken van 0 of 1.*

Wiskunde A en C

In de syllabi voor de nieuwe programma's is aangegeven dat de kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en hij hiernaar dient te handelen.

Bij wiskunde A en C gaat het vooral om het kunnen gebruiken van wiskunde bij het oplossen van problemen in betekenisvolle contexten en minder om het bedrijven van wiskunde als zelfstandige discipline (zie cTWO-rapport *Denken en doen*). Het is niet de bedoeling dat leerlingen veelvuldig afgestraft worden voor het maken van afrondfouten. Om die reden is het aantal aftrekpunten voor het maken van afrondfouten bij wiskunde A en C gemaximeerd op 2 voor het volledige examen.

Wiskunde B

Het karakter van wiskunde B brengt met zich mee dat contexten minder voorkomen dan bij wiskunde A en C en eerder aanleiding zijn tot abstractie en de vorming van wiskundige concepten (zie cTWO-rapport *Denken en doen*). Daarom wordt het aantal aftrekpunten voor afrondfouten bij wiskunde B-examens niet gemaximeerd.

Werkwijze correctie

Omdat bij wiskunde A en C maximaal twee afrondfouten in rekening gebracht mogen worden, noteren eerste en tweede corrector per examenwerk bij welke vragen een scorepunt in mindering is gebracht op basis van de nieuwe afrondregel. De eerste corrector noteert bij elke afrondfout in het werk van de kandidaat voor de kantlijn een A. De tweede corrector gaat na of hij zich kan vinden in dit aspect van de beoordeling door de eerste corrector. De deelscores per vraag worden zoals gebruikelijk in het programma Wolf ingevoerd. Bij de laatste scorecomponent van Wolf voert de docent een compensatiescore in, namelijk het aantal afrondfouten hoger dan twee. Wolf telt deze compensatiescore automatisch op bij de totaalscore. Er mogen immers maximaal twee afrondfouten in rekening worden gebracht.

Voorbeeld:

Stel een kandidaat heeft op de vragen een score van 50 behaald. Bij vijf vragen is i.v.m. met de nieuwe afrondregel 1 scorepunt in mindering gebracht. Van de 5 in mindering gebrachte scorepunten mogen er slechts 2 verrekenend worden. Er moet dus bij dit voorbeeld door de corrector een compensatiescore van $5 - 2 = 3$ worden ingevoerd als laatste component. De volgens afrondregel c. gecorrigeerde totaalscore wordt dus $50 + (\text{de compensatiescore}) 3 = 53$.

Voorbeelden van leerlinguitwerkingen

In deze toelichting wordt door middel van enkele leerlinguitwerkingen aangegeven, waar en hoe de nieuwe regels toegepast moeten worden.

Voorbeeld 1

Het aantal inwoners van de gemeente A is in de periode 2010 tot 2016 exponentieel gestegen.

Op 1 januari 2010 was het aantal inwoners 265 431 en op 1 januari 2016 was dit 310 247.

Men gaat ervan uit dat deze exponentiële groei zich ook in de jaren hierna zo zal voortzetten. Bereken in welk jaar het aantal inwoners voor het eerst groter zal zijn dan 400 000.

Uitwerking leerling 1
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{310247}{265431}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,026343315$

De vergelijking $310\,247 \cdot 1,026343315^t = 400\,000$ moet worden opgelost.

Met GR: (leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet)

Dit geeft $t \approx 9,8$

Het antwoord: in 2025

Alle scorepunten worden toegekend.

Afrondfouten als gevolg van het beperkt aantal cijfers waarmee de GR rekt, leiden uiteraard niet tot aftrek van scorepunten.

Uitwerking leerling 2
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{310247}{265431}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,03$

De vergelijking $310\,247 \cdot 1,03^t = 400\,000$ moet worden opgelost.

Met GR: (leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet)

Dit geeft $t = 8,6$

Het antwoord: in 2024

Op grond van afrondregel a. wordt 1 scorepunt afgetrokken voor het tussentijds afronden met een verkeerd eindantwoord tot gevolg.

Uitwerking leerling 3
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{310247}{265431}\right)^{\frac{1}{6}} = 1,03$

De vergelijking $310\,247 \cdot 1,03^t = 400\,000$ moet worden opgelost.

Met GR: (leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet)

Dit geeft $t \approx 9,8$

Het antwoord: in 2025

Aan de uitwerking is te zien dat doorgerekend is met de niet-afgeronde waarde. Alle scorepunten worden toegekend. Tussenantwoorden mogen immers afgerond genoteerd worden.

Voorbeeld 2

In een grote supermarktketen worden literflessen frisdrank van het merk Spliss verkocht.

In 2013 was de verkoopprijs van deze flessen € 0,80, in 2014 was deze € 0,90.

In 2013 was de omzet van deze frisdrank € 283 580, in 2014 was deze € 346 248.

Hoeveel flessen Spliss werden er in 2014 meer verkocht dan in 2013? Rond je eindantwoord af op duizendtallen.

Uitwerking leerling 1

Het aantal verkochte flessen in 2013 was

$$\frac{283580}{0,80} = 354475$$

Het aantal verkochte flessen in 2014 was

$$\frac{346248}{0,90} = 384720$$

Het verschil is 30 245, dus 30 000

Alle scorepunten worden toegekend.

Uitwerking leerling 2

Het aantal verkochte flessen in 2013 was

$$\frac{283580}{0,80} = 354000$$

Het aantal verkochte flessen in 2014 was

$$\frac{346248}{0,90} = 385000$$

Het verschil is 31 000

Er is twee keer ten onrechte tussendoor afgerond, met een ander eindantwoord tot gevolg. Er wordt bij deze vraag 1 scorepunt afgetrokken voor het tussentijds afronden op grond van afrondregel a.

Uitwerking leerling 3

Het aantal verkochte flessen in 2013 was

$$\frac{283580}{0,80} = 354475$$

Het aantal verkochte flessen in 2014 was

$$\frac{346248}{0,90} = 384720$$

Het verschil is 30 245

Het eindantwoord is ten onrechte niet afgerond op duizendtallen. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken, omdat niet is afgerond (zie afrondregel c).

Voorbeeld 3

Het lichaamsgewicht van iemand met obesitas is de afgelopen jaren, dankzij een streng dieet, gedaald van 133,20 kilogram op 1 juli 2011 naar 87,20 kilogram op 1 juli 2016. We gaan uit van een wiskundig model waarbij de gewichtsafname lineair verloopt. Neem aan dat deze daling zich nog enige tijd zo voortzet.

Bereken zijn gewicht in kilogram op 1 april 2017. Rond je eindantwoord af op één decimaal. Je hoeft geen rekening te houden met de verschillende lengtes van de maanden.

Uitwerking leerling 1

De gemiddelde afname per maand is $(133,20 - 87,20) / 60 = 0,76$.

Gewicht op 1 april 2017 is $87,20 - 9 \cdot 0,76 = 80,3$.
 De gemiddelde afname van het gewicht per maand lijkt foutief afgerond (GR geeft bijvoorbeeld 0,7666666667).
 Uit de verdere uitwerking blijkt echter dat doorgerekend is met de niet-afgeronde waarde en het tussenantwoord afgekapt is opgeschreven. Hier is dus sprake van een notatiefout. In het artikel 'Gelijke monniken, gelijke kappen' (Euclides, december 2014) staat dat fouten in wiskundige notaties de A/C-leerlingen niet altijd aangerekend moeten worden en notatiefouten in aanloop naar in essentie juiste antwoorden kunnen worden geaccepteerd. In datzelfde artikel is te lezen dat bij wiskunde B notatiefouten (verschrijvingen) wel aangerekend dienen te worden. Omdat uit de verdere uitwerking blijkt dat juist is doorgerekend, is de schrijfwijze bij wiskunde B echter passabel. Zowel bij wiskunde A/C als bij wiskunde B vindt dus geen aftrek van scorepunten plaats.

Uitwerking leerling 2

De gemiddelde afname per maand is
 $(133,20 - 87,20) / 60 = 0,76$.

Gewicht op 1 april 2017 is $87,20 - 9 \cdot 0,76 = 80,4$.

Uit de uitwerking blijkt dat de kandidaat in de tussenstap foutief heeft afgerond. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken voor het foutief afronden.

Uitwerking leerling 3

De gemiddelde afname per maand is

$$\frac{133,20 - 87,20}{60} = 0,7\dots$$

Het gewicht op 1 april 2017 is $87,20 - 9 \cdot 0,7\dots = 80,3$.

Alle punten worden toegekend. Door het gebruik van puntjes bij het tussenantwoord geeft de leerling aan het tussenantwoord niet volledig opgeschreven te hebben. Uit de verdere uitwerking blijkt echter dat wel doorgerekend is met de niet-afgekapte of niet-afgeronde waarde.

Voorbeeld 4

a. De functie f is gegeven door $f(x) = 1,12^x$.

Bereken de kleinste waarde van x , waarvoor geldt:

$$f(x) \geq 4.$$

Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Uitwerking leerling

Met GR: (leerling geeft aan hoe GR wordt ingezet om $f(x) = 4$ op te lossen)

$$x = 12,23251075$$

Het antwoord: 12,23

Het eindantwoord is ten onrechte naar beneden afgerond.

Er wordt 1 scorepunt afgetrokken omdat onjuist is afgerond. Een vergelijkbare situatie wordt beschreven in 'Gelijke monniken, gelijke kappen' onder het kopje 'Afronden', voorbeeld 2.

b. Bereken de toename van f op het interval $[15, 20]$ in één decimaal nauwkeurig.

Uitwerking leerling 1

$$f(20) = 1,12^{20} = 9,6\dots$$

$$f(15) = 1,12^{15} = 5,4\dots$$

Toename is $f(20) - f(15) = 4,2$.

Alle punten worden toegekend. Door het gebruik van de puntjes bij het tussenantwoord geeft de leerling aan het tussenantwoord niet volledig opgeschreven te hebben. In de verdere uitwerking is niet te zien of er doorgerekend is met de afgekapte of met de niet-afgekapte waarden. De leerling krijgt het voordeel van de twijfel.

Uitwerking leerling 2

$$f(20) = 1,12^{20} = 9,7$$

$$f(15) = 1,12^{15} = 5,5$$

Toename is $f(20) - f(15) = 4,2$

Aan de tussenantwoorden is te zien dat er onjuist afgerond is. Er wordt 1 scorepunt afgetrokken.

Het CvTE realiseert zich dat met de nieuwe afrondregel en de gegeven voorbeelden niet op voorhand alle beoordelingsproblemen zijn opgelost. Overleg tussen eerste en tweede corrector blijft altijd nodig.

Ervaringen opgedaan bij de examens van 2017 zullen meegenomen worden bij het vaststellen van de vorm en inhoud van de correctievoorschriften vanaf 2018.

Het CvTE dankt de pilotdocenten, de toetsdeskundigen van Cito en de leden van de vaststellingscommissies voor hun opbouwende en kritische opmerkingen bij de totstandkoming van deze toelichting.

Over de auteur

Dit artikel is tot stand gekomen onder auspiciën van het CvTE. Emailadres: info@hetcvte.nl

