College voor Examens

Bijlage bij de syllabus wiskunde A vwo 2018

Hoofdstuk 3 voorbeeld(examen)opgaven

Versie april 2014

Centrale examens VO

Voorwoord

Dit document hoort bij de syllabus wiskunde A vwo 2018 en bevat de voorbeeld(examen)opgaven waarnaar in hoofdstuk 3 van deze syllabus wordt verwezen.

In de inleiding op de volgende pagina vindt u een toelichting op de verschillende categorieën opgaven, gevolgd door tabellen waarin een koppeling is gemaakt tussen de specificaties van het CE-deel van het examenprogramma en de opgaven. Deze tabellen zijn ook in hoofdstuk 3 van de syllabus opgenomen.

Daarna vindt u de voorbeeldopgaven, de voorbeeldexamenopgaven en de pilotexamenopgaven, gevolgd door uitwerkingen respectievelijk correctievoorschriften.

Inleiding

In deze bijlage worden voorbeeld(examen)opgaven gegeven ter verduidelijking van de specificaties in de categorie 'productieve vaardigheden' en om een indicatie te geven van het te verwachten niveau van de bijbehorende examenopgaven. Deze voorbeeld(examen)opgaven zijn in drie categorieën ingedeeld:

- **voorbeeldopgaven**: deze zijn bedoeld ter illustratie van de specificaties, niet om het niveau aan te duiden;
- **voorbeeldexamenopgaven**: deze zijn bedoeld om én de specificaties te verduidelijken én om het niveau van de examenopgaven aan te geven;
- **pilotexamenopgaven**: deze opgaven zijn ontleend aan de pilotexamens 2012, eerste en tweede tijdvak; ook deze zijn bedoeld ter verduidelijking van de specificaties en als indicatie van het niveau van de examenopgaven.

In de volgende tabel wordt dit zichtbaar gemaakt.

	verduidelijking van specificaties	*aanduiding van examenvragenniveau*
voorbeeldopgaven	x	
voorbeeldexamenopgaven	x	x
pilotexamenopgaven	x	x

Voor het gemak van de lezer zijn al deze opgaven opgenomen in deze bijlage in de volgorde voorbeeldopgaven, voorbeeldexamenopgaven, pilotexamenopgaven. Bovendien zijn de volledige pilotexamens 2012, eerste en tweede tijdvak, opgenomen. Voor de volledigheid: naar de pilotexamens van 2013 en daarna wordt niet verwezen, omdat die op het moment dat dit deel van de syllabus werd geschreven, nog niet beschikbaar waren. Uiteraard zijn ook deze pilotexamens en die van de volgende jaren eveneens goede bronnen voor de centrale examens van het nieuwe programma.

In tabellen wordt per subdomein en specificatie aangegeven welke voorbeeldopgave(n), voorbeeldexamenopgave(n) en/of pilotexamenopgave(n) daarbij horen. Ook is een tabel opgenomen waarin zichtbaar wordt gemaakt welke pilotexamenopgaven met name de specificaties van subdomein A3 Wiskundige vaardigheden illustreren.

Van de voorbeeld(examen)opgaven zijn uitwerkingen opgenomen, van de pilotexamens de correctievoorschriften.

Voorbeeldexamen

In 2017 zal op de pilotscholen voor het eerst een examen worden afgenomen bij deze definitieve syllabus. Dit examen kan als voorbeeldexamen voor 2018 gebruikt worden. Daarnaast kunnen eerder afgenomen pilotexamens een goed beeld geven van de te verwachten centrale examens vanaf 2018. Deze examens zijn geconstrueerd aan de hand van de werkversies van de syllabus bij het experimentele examenprogramma wiskunde C. Ook deze zijn te vinden op www.cve.nl

Indeling opgaven naar specificaties

De *voorbeeldopgaven* die betrekking hebben op de domeinen B, C en D, in relatie tot domein A, zijn:

a. Groenbelegging
b. Al doende leert men
c. Sterilisatie
d. Verhoudingen
e. Tanken
f. Golvend dak
g. Lawaaitrauma
h. Genius
i. Keno
j. Sauna
k. Lengte van jongetjes

De *voorbeeldexamenopgaven* die betrekking hebben op de domeinen B, C en D, in relatie tot domein A zijn:

A. Onnodig ingewikkeld?
B. Bezonning
C. Economische cycli
D. Wereldbevolking
E. Koolstofdatering
F. Verkeersdrempels
G. Berlijnse klok
H. Sluipwespen
I. Groenbelegging
J. Productie en temperatuur
K. Quadominos
L. Elektriciteit

De opgaven I, J, K en L zijn zogeheten korte-onderzoeksopgaven, opgaven waarbij een probleemsituatie wordt geschetst, gevolgd door één vraag. Het aantal scorepunten hiervan varieert van 6 tot 8.

Domein B: Algebra en Tellen

Spec.	Pilotexamenopgaven	Voorbeeldexamen-opgaven	Voorbeeldopgaven
Subdomein B1: Algebra			
1	2012-I vragen 8, 9, 16 en 19 2012-II vraag 20	I	a vraag 2 b vraag 1 e vragen 1 en 2 g vraag 1
2	2012-I vraag 12	E vraag 3	a vraag 4 c vraag 5 e vragen 4 en 5 j vraag 5
3	2012-I vragen 4, 11 en 15	A vragen 1 en 3 D vragen 1 en 3	b vraag 4 d vragen 3 en 6 e vragen 2 en 3
4	2012-I vraag 5 2012-II vragen 3, 6 en 9	A vraag 1 B vragen 1 en 3	e vraag 3 j vraag 1
Subdomein B2: Telproblemen			
1	2012-I vragen 15 en 20	G vragen 2 en 3 K	h vragen 1 en 2 i vragen 1 en 2
2	2012-I vragen 15 en 20	G vragen 1, 2 en 3 K	h vragen 1 en 2 i vragen 1 en 2
3	2012-I vragen 15 en 20	G vragen 2 en 3 K	h vragen 1 en 2 i vragen 1 en 2
4	2012-I vragen 15 en 20	G vragen 1, 2 en 3 K	h vragen 1 en 2 i vragen 1 en 2
5	2012-I vragen 15 en 20	G vragen 1, 2 en 3 K	h vragen 1 en 2 i vragen 1 en 2

Domein C: Verbanden

Spec.	Pilotexamenopgaven	Voorbeeldexamen-opgaven	Voorbeeldopgaven
Subdomein C1: Standaardfuncties			
1	2012-I vraag 19 2012-II vragen 2 en 13		b vragen 3 en 5 f vraag 1
2	2012-I vragen 1, 2, 3, 6, 10, 18 en 19 2012-II vraag 2	B vragen 3 en 4 C vragen 1, 2 en 4 D vraag 3 E vraag 4 F vraag 1 H vragen 1 en 3 I J L	b vragen 1, 2, 3, 4 en 6 c vragen 1 en 2 d vraag 6 f vraag 1 g vragen 1 en 3 k vraag 2

Domein C: Verbanden

Spec.	**Pilotexamenopgaven**	**Voorbeeldexamen-opgaven**	**Voorbeeldopgaven**
Subdomein C2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden			
1	2012-I vraag 15 2012-II vragen 3, 9 en 13	B vragen 1 en 2 D vraag 1 E vragen 2 en 4 H vraag 1 I	a vragen 2 en 3 b vragen 2 en 4 c vraag 1 d vragen 3 en 6 g vraag 3 k vraag 2
2	2012-I vragen 4 en 12 2012-II vragen 4, 10 en 18	E vraag 3	a vraag 4 d vraag 6 e vragen 3 en 5 j vraag 5
3	2012-II vraag 19	E vraag 3	c vraag 5 d vraag 6
4	2012-I vragen 10, 17, 18 en 19 2012-II vragen 5 en 12	C vraag 3 D vraag 4 F vraag 4 J L	e vraag 3 k vraag 1
5	2012-I vragen 17 en 18 2012-II vraag 4	B vraag 3 C vraag 3 F vraag 4	k vraag 3
6			c vraag 5 e vraag 4
7	2012-I vraag 19 2012-II vragen 3, 6, 8 en 17	B vraag 2 E vraag 1 F vraag 2 L	a vragen 1 en 3 c vragen 1, 2, 4 en 5 d vraag 4 e vraag 4 f vragen 2 en 3 g vraag 3 j vraag 1
8	2012-I vragen 3, 5 en 19 2012-II vragen 3, 6, 8 en 17	A vraag 1 B vraag 2 D vragen 2, 3 en 4 E vraag 1 F vraag 2	a vragen 1 en 3 c vragen 1, 2 en 4 d vraag 4 f vragen 2 en 3 g vraag 3 j vraag 1
9		E vraag 5	
10	2012-I vraag 18		
11		B vraag 4	
12	2012-II vraag 16		c vragen 1 en 3 g vragen 2 en 3
13	2012-I vragen 1, 2, 6, 11, 13 en 14 2012-II vraag 18	B vraag 2 C vraag 4 L	b vragen 3, 5 en 6 e vraag 4

Domein D: Verandering

Spec.	Pilotexamenopgaven	Voorbeeldexamen-opgaven	Voorbeeldopgaven
Subdomein D1: Rijen			
1		C vraag 5	
2			
3		C vraag 5 D vraag 5	b vraag 4
4			
5		C vraag 5	d vragen 1 en 2
6			d vragen 1 en 2
Subdomein D2: Helling			
1		A vraag 2 H vraag 2	j vraag 2
2			j vraag 4
3		A vraag 3	d vraag 5
4			j vraag 2
5	2012-I vraag 16 2012-II vraag 1		
6	2012-II vragen 7 en 11	C vraag 2 F vraag 3	f vraag 3
7	2012-II vraag 7		f vraag 3 j vraag 4
Subdomein D3: Afgeleide			
1	2012-II vraag 18	A vraag 2 H vraag 2	c vraag 4 j vraag 3
2	2012-I vragen 5 en 7		j vraag 3
3	2012-I vraag 7 2012-II vraag 14	A vraag 2 H vraag 2	c vraag 4 j vraag 3
4	2012-I vraag 7 2012-II vraag 11	A vraag 2	
5	2012-I vragen 5 en 7		
6	2012-I vraag 7 2012-II vraag 14		
7	2012-II vragen 11, 14 en 18	A vraag 2 H vraag 2	j vraag 3

Relatie met subdomein A3
Onderstaande examenvragen zijn bedoeld om de specificaties van subdomein A3 te verduidelijken. De vragen komen uit het pilotexamen vwo wiskunde A 2012-I.

Spec.	De kandidaat	**Pilotexamenvragen**
A3.1	beheerst de rekenregels;	
A3.2	beheerst de specifieke algebraïsche vaardigheden;	3, 4, 12
A3.3	heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren;	6
A3.4	kan wiskundige informatie ordenen en in probleemsituaties de wiskundige structuur onderkennen;	18
A3.5	kan bij een gegeven probleemsituatie een model opstellen in wiskundige termen;	17
A3.6	kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren binnen de context;	19
A3.7	kan vakspecifieke taal interpreteren en gebruiken;	5
A3.8	kan de correctheid van wiskundige redeneringen verifiëren;	13
A3.9	kan eenvoudige wiskundige redeneringen correct onder woorden brengen;	11
A3.10	kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij het geven van wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen;	7
A3.11	kan antwoorden afronden op een voorgeschreven nauwkeurigheid dan wel op een nauwkeurigheid die past bij de probleemsituatie.	19

Voorbeeldopgaven

a Groenbelegging (ontleend aan examen wA1 vwo 2007, 1e tijdvak)

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.

foto Plantage waar bomen voor belegging gekweekt worden

Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

> Uw belegging groeit vanzelf.
> De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant.
> Hoe ouder de bomen, hoe langer en dikker ze worden. Voordat de bomen gekapt worden, groeien ze voortdurend volgens de formules
> $L = 0,75 \cdot t$ en $D = 0,0042 \cdot t + 0,072$.
> Hierbij is t de tijd in jaren na het plantmoment, L de lengte van een boom in meters en D de stamdiameter in m.
>
> De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0,16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout van de boom.

Die formules voor L en D benaderen de werkelijke groei slechts. Direct na het planten passen de formules echter nog niet zo goed bij de echte groei van de bomen.
Pas vanaf het moment dat volgens de formules de diameter van de Labironia-boom 5% bedraagt van de lengte van een Labironia-boom, gelden de formules.

1 Vanaf welk moment na het plantmoment gelden de formules?

Een Labironia-boom van 15 jaar oud levert meer m^3 benutbaar hout op dan een van 8 jaar oud.

2 Bereken hoeveel m^3 het verschil bedraagt. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Ook is het zo dat de groei van oudere bomen van deze soort niet volgens de formules plaats zal vinden. Omdat alle bomen toch op een bepaald vastgesteld moment na het planten gekapt zullen worden, is het in deze opgave niet van belang dat de groei op zeker moment niet meer volgens de formules verloopt.
De 960 bomen op één perceel worden niet alle op hetzelfde moment gekapt. Dat kappen gebeurt in verschillende rondes. De laatste ronde van dat kappen, het moment dus dat alle bomen gekapt zijn, vindt plaats op het moment dat een Labironia-boom een diameter heeft van 0,156 m.

3 Bereken de lengte van een Labironia-boom op het moment van de laatste kapronde.

De houtopbrengst van een boom kan geschreven worden in de volgende vorm:

$$M = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$$

4 Bereken a , b en c .

b **Al doende leert men** (ontleend aan examen wiA1 vwo 2004, 2e tijdvak)

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enz.

Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $\frac{16+12,8}{2}=14,4$ minuten.

Deze 14,4 minuten zie je in tabel 1. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

tabel 1

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Met behulp van tabel 1 kunnen we berekenen dat een werknemer 8,1 minuten nodig heeft om handeling A voor de 5e keer te verrichten.

1 Geef zo'n berekening.

Wanneer we de gemiddelde handelingstijd H_n willen uitrekenen voor meer dan 6 handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n. Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:

$$H_n = 0,14n^2 - 2n + 17,8$$

Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van tabel 1 voor $n=1$ tot en met $n=6$.

2 Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit tabel 1 en de bijbehorende waarden van H_n.

Voor grote waarden van n is de formule voor H_n echter niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven.

3 Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet.
Toch kunnen we bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na 10 handelingen uitrekenen. Daarbij maken we gebruik van T_n, de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:

$$T_n = 6 + 14,7 \cdot 0,68^n$$

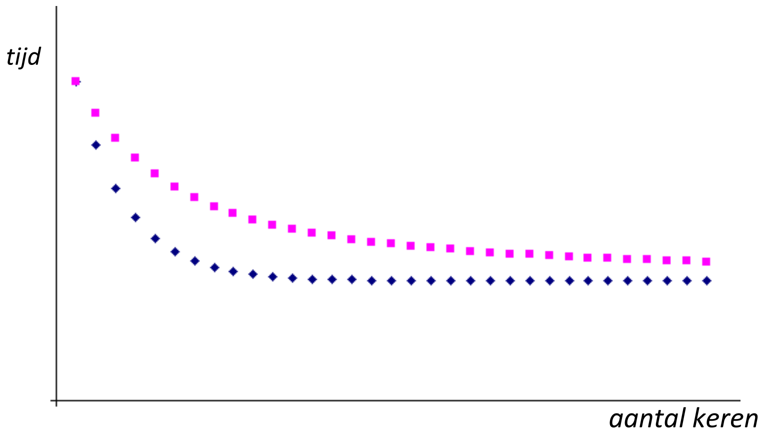
In deze formule is T_n in minuten. Inderdaad levert deze formule $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12,8$.
Met deze formule kunnen we ook andere handelingstijden uitrekenen en dus ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

4 Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer 10 keer handeling A heeft uitgevoerd.

Als je kijkt naar de formule $T_n = 6 + 14,7 \cdot 0,68^n$, dan kun je constateren dat T_n steeds kleiner wordt als n groter wordt. Op de lange duur komt T_n echter niet onder een bepaalde grens.

5 Hoe groot is die grens? Licht je antwoord toe.

figuur 1



Hierboven staan schetsen van de grafieken van de handelingstijd en de gemiddelde handelingstijd in één assenstelsel. Naar aanleiding van deze figuur maakt iemand de volgende twee opmerkingen:
1. Een van beide grafieken zal altijd boven de andere grafiek liggen.
2. De twee grafieken komen steeds dichter bij elkaar en er zal op den duur geen echt verschil meer te zien zijn.

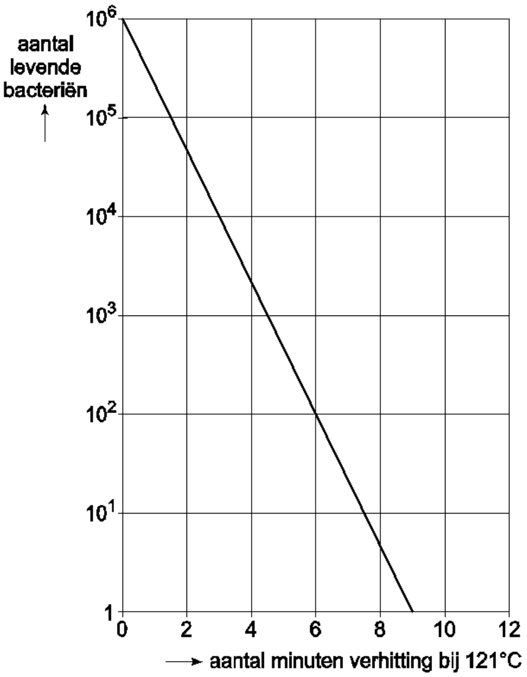
Door redeneren zonder rekenen kun je onderzoeken of deze opmerkingen waar zijn of niet.

6 Onderzoek op deze wijze of deze beweringen waar zijn.

c **Sterilisatie** (ontleend aan examen wiA1,2 vwo 2006, 2e tijdvak)

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethoden.
In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. In figuur 1 zie je een overlevingsgrafiek van de Bacillus stearothermophilus.

figuur 1



Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. We gaan er steeds van uit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft.
Bij de grafiek in figuur 1 hoort een formule van de vorm:

$$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$$

Hierin is $N(t)$ het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën.

Met behulp van figuur 1 kun je berekenen dat de sterftefactor r van de Bacillus stearothermophilus ongeveer gelijk is aan 2,2.

1 Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

2 Bereken voor de Bacillus stearothermophilus de D-waarde met behulp van bovenstaande formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van figuur 1.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor de Clostridium botulinum is deze D-waarde gelijk aan 2,55 minuten.
Met dit gegeven kunnen we de overlevingsgrafiek van de Clostridium botulinum tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek beginnen we weer met 1 miljoen bacteriën.

3 Teken deze overlevingsgrafiek in figuur 1. Licht je werkwijze toe.

Zoals hierboven al beschreven, geldt voor Bacillus stearothermophilus de formule

$$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t}$$

Met behulp van deze formule kun je voor elk tijdstip t berekenen hoe groot het aantal bacteriën op dat tijdstip is.
Je kunt aan deze formule (en ook aan de grafiek, zie figuur 1) zien dat er steeds minder bacteriën zijn naarmate de tijd toeneemt. Het aantal bacteriën neemt echter niet met een vast aantal per minuut af.

4 Bereken, gebruik makend van de afgeleide van $N(t)$, op welk tijdstip dat aantal bacteriën afneemt met 10 000 bacteriën per minuut.

Voor elk type bacteriën kunnen we de D-waarde berekenen wanneer we de sterftefactor r kennen. Daarvan heb je in vraag 2 een voorbeeld gezien. Wanneer we dat voor een aantal typen bacteriën doen, blijkt dat D en r omgekeerd evenredig zijn.

5 Toon aan, door gebruik te maken van de formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t}$, dat tussen D en r een omgekeerd evenredig verband bestaat.

d Verhoudingen (ontleend aan examen wiA1 vwo 2007, 1e tijdvak)

In de wiskunde is de volgende rij getallen erg bekend:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Deze rij getallen staat bekend als de rij van Fibonacci (Pisa, 1170-1250). Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee voorgaande getallen op te tellen. In formulevorm ziet dit er als volgt uit:

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ met $u_1 = 1$ en $u_2 = 1$

Je kunt dit eenvoudig narekenen bij het begin van de rij:

2 = 1 + 1
3 = 2 + 1
5 = 3 + 2
8 = 5 + 3
enzovoort.

Het is duidelijk dat de getallen in de rij van Fibonacci steeds groter worden.

1 Bereken hoeveel getallen in de rij van Fibonacci een waarde hebben tussen 100 en 500.

De rij van Fibonacci heeft veel bijzondere eigenschappen. Zo heeft de rij die je krijgt door steeds de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci te nemen een grenswaarde G.

Het gaat dan om de rij $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$ enzovoort. De waarde van deze breuken is op den duur ongeveer gelijk aan 1,618. Vanaf een zeker moment ligt deze verhouding tussen 1,6180 en 1,6181.

Deze grenswaarde G is, met name in de kunst, bekend geworden als de gulden snede.

2 Bereken vanaf welk tweetal opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci de verhouding ligt tussen 1,6180 en 1,6181.

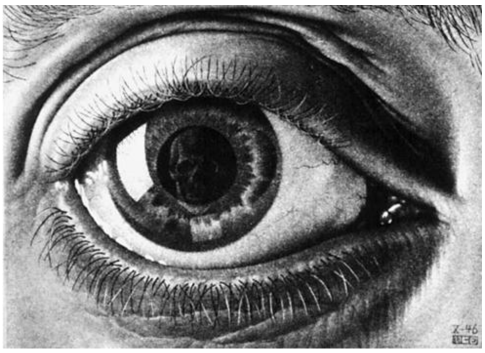
In de 19e eeuw deed Fechner onderzoek naar de esthetische waarde die door velen aan de gulden snede wordt toegekend. Hij liet een aantal mensen rechthoeken zien waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte telkens verschillend was. Aan deze mensen werd gevraagd welke rechthoek zij het mooist vonden. Uit het onderzoek bleek dat rechthoeken waarvan de verhouding van de lengte en de breedte ongeveer de gulden snede opleverde, het meest werden uitgekozen. Mede op grond van deze resultaten stelde Petrov een formule op waarmee hij deze voorkeur wilde uitdrukken in een getal. Hij noemde dit de appreciatiewaarde A van de rechthoek en kwam met de volgende formule:

$$A = \left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right)$$

In deze formule is v de verhouding tussen de langste zijde en de kortste zijde van de rechthoek, dus $v = \frac{\text{langste zijde}}{\text{kortste zijde}}$.

schilderij

litho



De afmetingen van het schilderij 'De Nachtwacht' van Rembrandt van Rijn zijn 363 cm bij 437 cm. De afmetingen van 'Oog', een litho van M.C. Escher, zijn 141 cm bij 198 cm.

3 Bereken welk van deze twee kunstvoorwerpen de grootste appreciatiewaarde heeft volgens de formule van Petrov.

Het schilderij 'Moment' van Barnet Newman heeft een appreciatiewaarde van 0,1544 en de langste zijde van dit schilderij is 762 cm. Die langste zijde is meer dan 3 meter langer dan de kortste zijde.

4 Bereken de lengte van de kortste zijde van 'Moment'.

Petrov constateerde dat de verhouding v tussen de langste en de kortste zijde waarbij de appreciatiewaarde maximaal is, maar weinig verschilt van de waarde 1,618 van de gulden snede.

5 Bereken dit verschil.

De formule van Petrov werd oorspronkelijk op een iets andere manier opgeschreven dan hierboven vermeld. Hieronder staan drie verschillende mogelijkheden A, B en C voor die oorspronkelijke schrijfwijze. Slechts één van de drie komt overeen met de formule die hierboven vermeld wordt.

A. $A = \frac{v-1}{v} \cdot \log\left(\frac{v}{v-1}\right)$

B. $A = \frac{1-v}{v} \cdot \log\left(\frac{v}{v-1}\right)$

C. $A = \frac{v}{v-1} \cdot \log\left(\frac{v-1}{v}\right)$

6 Welke van deze formules komt overeen met de formule van Petrov? Licht je antwoord toe.

e **Tanken** (ontleend aan examen wiA vwo oude stijl 2004, 1e tijdvak)

De onderstaande tekst is afkomstig uit een artikel uit een landelijk dagblad van augustus 1997.

> .... De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is 5 gulden per liter en die in Duitsland is 2 gulden per liter. Dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van 150 gulden. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 20 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 750 kilometer rijden, dat is 375 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Den Helder nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten vertrekken om de grens te halen en met een half lege thuis zou komen ....

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van 'tanken in het buitenland' bekijken we in de vragen 1 en 2 een vereenvoudigd voorbeeld:
Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Jan woont op 200 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 km rijdt. Als hij tankt, tankt hij altijd precies 50 liter.

Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen.
Jan redeneert op de manier van het artikel: "mijn voordeel is 3 gulden per liter; zelfs als ik daar de kosten van het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel".

1 Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken volgens deze redenering 70 gulden bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen per gebruikskilometer. Een gebruikskilometer is elke afgelegde kilometer die niet gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

2 Hoe groot is het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland voor Jan? Licht je antwoord toe met een berekening.

We bekijken nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noemen we N (in gulden per liter), de benzineprijs in het buitenland noemen we B (in gulden per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noemen we x (in km).
Voor het voordeel bij tanken in het buitenland V (in gulden) per gebruikskilometer geldt dan:

$$V = 0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{3125 - x}$$

Hierbij gaan we ervan uit dat:
– auto's 1 op 12,5 rijden: elke auto rijdt 12,5 km op 1 liter benzine;
– een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 50 liter tankt;
– een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken;
– een eigenaar van een auto niet extra hoeft te rijden om in Nederland te tanken.

3 Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 15 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.
4 Toon dat aan.

De literprijs van benzine verandert met grote regelmaat. Daarmee verandert ook de afstand tot het dichtstbijzijnde tankstation in het buitenland waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken.

5 Toon aan dat uit $V = 0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{3125 - x}$ volgt dat deze afstand gelijk is aan $312{,}5 \cdot \left(1 - \frac{B}{N}\right)$.

f **Golvend dak** (ontleend aan examen wiB1,2 havo 2008, 1e tijdvak)

Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In figuur 1 is een schematisch vooraanzicht getekend.
In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule

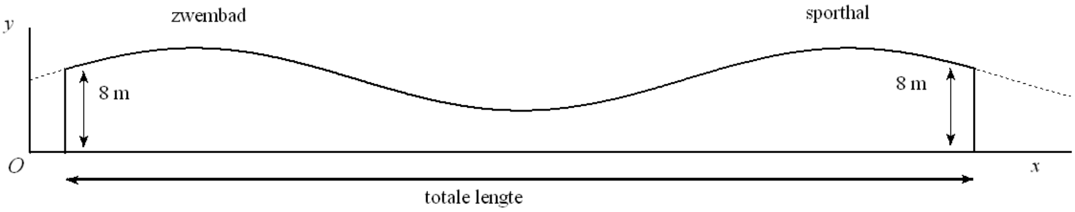
$$h = 3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7$$

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meter. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

foto

Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog. Zie figuur 1.

figuur 1



1 Bereken de minimale en de maximale hoogte van het dak.

2 Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.

Zoals je aan de grafiek in figuur 1 kunt zien, is de helling van het vooraanzicht niet overal hetzelfde.

3 Op hoeveel meter van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw (zie figuur 1) is de helling het grootst? Licht je antwoord toe.

g **Lawaaitrauma** (ontleend aan examen wiB1 havo 2001, 1e tijdvak)

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

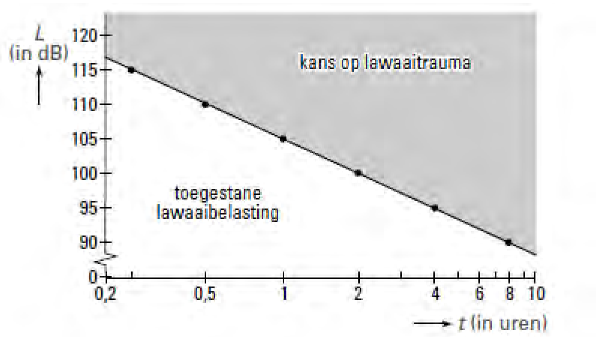
In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.
Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.
Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982-1988 exponentieel toenam.

1 Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.
Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:
– bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
– bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

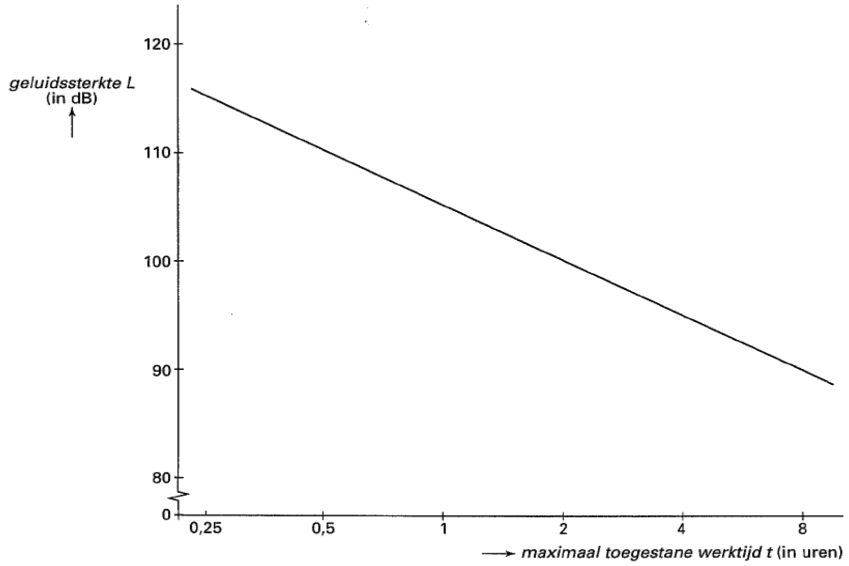
In het assenstelsel van figuur 1 is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidssterkte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industrielawaai in de VS. Op de horizontale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
L is de geluidssterkte in dB en t is de maximaal toegestane werktijd in uren.

figuur 1



De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:
– bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
– bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

figuur 2



In figuur 2 is de lijn, behorend bij de norm van de VS, nogmaals in een assenstelsel getekend. Ook hier is op de horizontale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

2 Teken in dit assenstelsel de lijn die bij de Europese norm hoort.

De formule die hoort bij de in figuur 1 getekende lijn is $L = -16{,}6 \cdot \log(t) + 105$

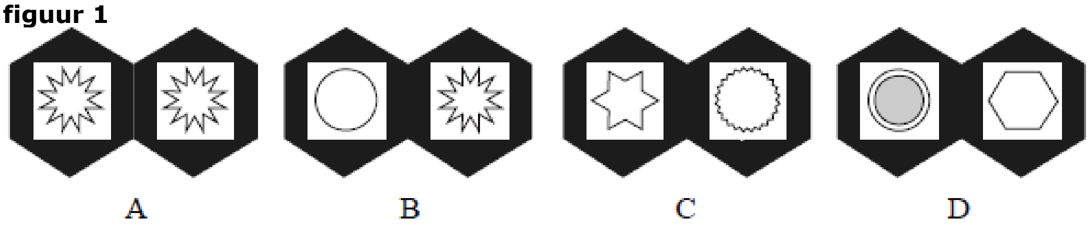
In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidssterkte. In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.

3 Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

h **Genius** (ontleend aan examen wiA1,2 vwo 2008, 2e tijdvak)

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak.
Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. In figuur 1 zijn vier tegels afgebeeld.

figuur 1



Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in figuur 1 komt dus 5 keer voor.
Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B in figuur 1) komt 6 keer voor.

1 Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

Edwin en zijn vrienden zijn helemaal bezeten van dit voor hen nieuwe spel. Zij denken erover om een toernooi te houden. Zij laten daarbij steeds twee spelers tegen elkaar spelen. Aan deze competitie doen 16 spelers mee.

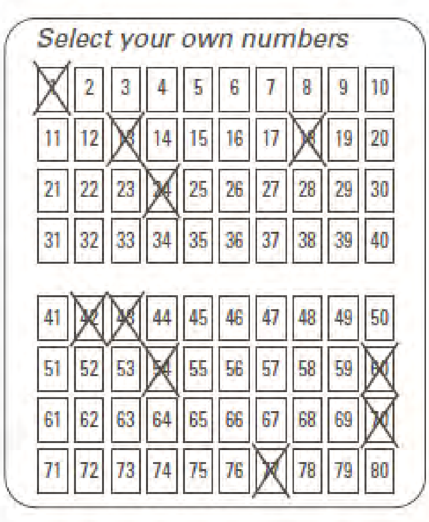
De spelers worden verdeeld over 4 poules van 4 spelers. In elke poule speelt elke speler één keer tegen elke andere speler. Na afloop van de poulewedstrijden gaan de beste twee spelers van elke poule door naar de kwartfinale. In de kwartfinale speelt elke speler maar tegen één andere speler. De winnaars van deze wedstrijden gaan door naar de halve finale.
In deze halve finale speelt weer elke speler één wedstrijd.
De winnaars spelen tenslotte de finale, die ook over één wedstrijd wordt beslist.

2 Bereken het aantal wedstrijden dat tijdens dit toernooi gespeeld moet worden.

i **Keno** (ontleend aan examen wiA1,2 vwo 2002, 2e tijdvak)

In de Verenigde Staten kun je op veel plaatsen het kansspel Keno spelen. De spelregels en de te winnen prijzen zijn niet overal precies hetzelfde. We kijken in deze opgave naar één bepaalde vorm waarin het spel gespeeld kan worden.
Een lot kost 1 dollar. Op het lot staan de getallen 1 tot en met 80. Om mee te spelen moet je 10 van deze 80 getallen aankruisen. Dat kan op verschillende manieren. In figuur 1 zie je daar een voorbeeld van.

figuur 1



1 Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om 10 verschillende getallen op het lot te kiezen.

Bij de trekking worden door een trekkingsmachine willekeurig 22 getallen gekozen uit de getallen 1 tot en met 80. Nu gaat het erom, hoeveel van de 10 aangekruiste getallen goed zijn. Dat wil zeggen, hoeveel er bij de 22 getallen uit de trekkingsmachine zitten.
Volgens Fred is het aantal mogelijkheden om op een lot 2 getallen aan te kruisen die goed zijn, meer dan 10 keer zo groot is als het aantal mogelijkheden waarbij geen enkel aangekruist getal goed is.

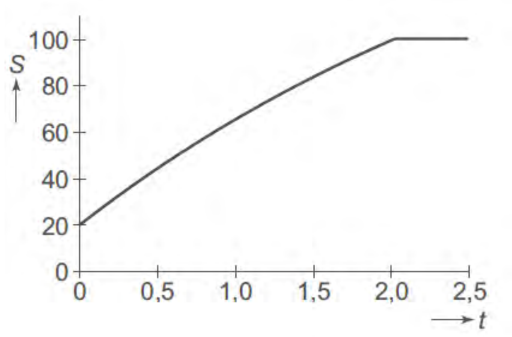
2 Onderzoek of Fred gelijk heeft.

j **Sauna** (ontleend aan examen wiB1, vwo 2006, 1e tijdvak)

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Voor het opwarmen geldt de formule $S = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$.
Hierin is S de temperatuur in de sauna in graden Celsius en t de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden.
In figuur 1 staat de grafiek van S .

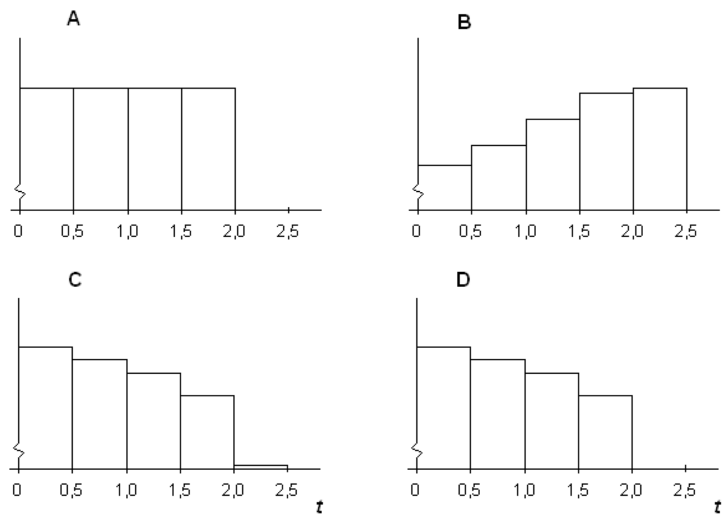
figuur 1



1 Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.

Om na te gaan hoe de opwarming van de sauna verloopt, wil men kijken naar een toenamediagram dat hierbij hoort. In figuur 2 zie je vier toenamediagrammen, allemaal met een stapgrootte van een half uur, voor de periode van 15.00 uur tot 17.30 uur.

figuur 2



2 Welk van de in figuur 2 geschetste diagrammen is het juiste toenamediagram? Licht je antwoord toe.

Als je in de grafiek van S naar het opwarmen kijkt, lijkt de temperatuur afnemend te stijgen.

3 Onderzoek met behulp van differentiëren of deze conclusie juist is.

4 Bereken $S'(1)$, afgerond op 1 decimaal en geef de betekenis ervan in deze situatie.

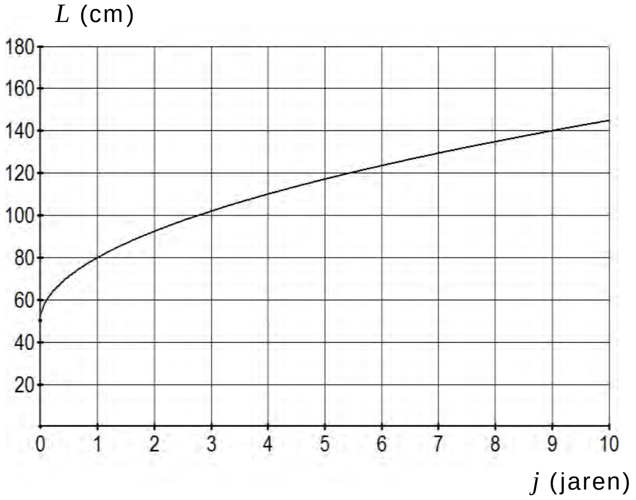
Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S.

5 Druk t uit in S.

k Lengte van jongetjes

Een onderzoeker heeft gegevens verzameld over de gemiddelde lengte van jongetjes van 0 tot 10 jaar in Nederland. In figuur 1 zie je het verband tussen de gemiddelde lengte L en de leeftijd j.

figuur 1



De formule die het verband tussen j en L beschrijft is

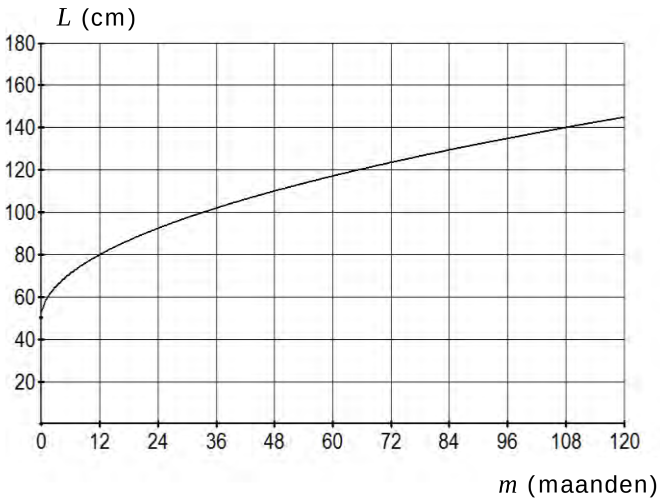
$$L = p + q\sqrt{j}$$

waarin p en q getallen zijn.

1 Bereken de waarden van p en q.

De onderzoeker is vooral geïnteresseerd in het verband tussen lengte en leeftijd in de eerste maanden na de geboorte. Zij maakt daartoe de grafiek van figuur 2.

figuur 2



2 Teken met behulp van de formule een grafiek van het verband tussen de gemiddelde lengte L en de leeftijd m in maanden voor het eerste levensjaar. Neem op de horizontale as 1 cm voor elke maand en op de verticale as 1 cm voor elke 5 cm lengte (gebruik een scheurlijn).

Uit de gegeven formule die het verband tussen L en j beschrijft, is een vergelijkbare formule af te leiden van het verband tussen L en m.

3 Stel een formule op die het verband tussen L en m beschrijft.

Voorbeeldexamenopgaven

A Onnodig ingewikkeld? (ontleend aan examen wiB1 vwo 2009, 2e tijdvak)

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$$S = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$$

Hierin is t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan.

Dus $S = \frac{L}{L_0}$.

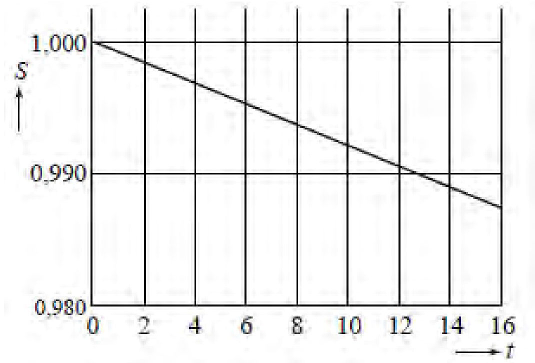
Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

4p **1** Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

In figuur 1 is de grafiek van S als functie van t getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule is bekend dat dit niet zo is.

figuur 1



6p **2** Stel de formule voor de afgeleide van S op en toon met behulp van deze afgeleide aan dat er bij S voor $0 \le t \le 16$ sprake is van daling. Onderzoek vervolgens of het hier om toenemende of afnemende daling gaat.

De grafiek van S valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten $(0; 1{,}0000)$ en $(16; 0{,}9872)$. Is de formule van S met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor S ook gewoon een lineaire functie van t kunnen nemen.
We vergelijken daarom de formule $S = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$ met de formule $S = -0{,}0008t + 1{,}0000$ die hoort bij de rechte lijn door de punten $(0; 1{,}0000)$ en $(16; 0{,}9872)$. Om de twee formules met elkaar te vergelijken, wordt de verschilformule $V = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183) - (-0{,}0008t + 1{,}0000)$ opgesteld.

We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van V kun je op elk tijdstip t (met $0 \le t \le 16$) het verschil tussen de uitkomsten van beide formules bekijken.

4p **3** Bereken de maximale waarde van dit verschil.

B Bezonning (ontleend aan examen wiA vwo 1991, 1e tijdvak)

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. In tabel 1 is af te lezen hoeveel dagen elke kalendermaand telt.

tabel 1

maand	aantal dagen	maand	aantal dagen	maand	aantal dagen
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

In de figuur op de uitwerkbijlage is het dagelijks aantal uren zonneschijn B bij een altijd wolkenloze hemel uitgezet tegen het nummer van de dag n; hierbij geldt $n = 1$ voor 1 januari. De andere grafiek B-*noord* speelt verderop pas een rol.

Voor B geldt de formule $B = 12,3 + 4,6 \cdot \sin(0,0172 \cdot (n - 80))$

Op 30 januari komt de zon op om 8:27u.

4p **1** Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.

4p **2** Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is dat de zon langer dan 14 uur schijnt.

Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonneschijn.

3p **3** Bereken aan de hand van de formule voor B dit verschil in minuten nauwkeurig.

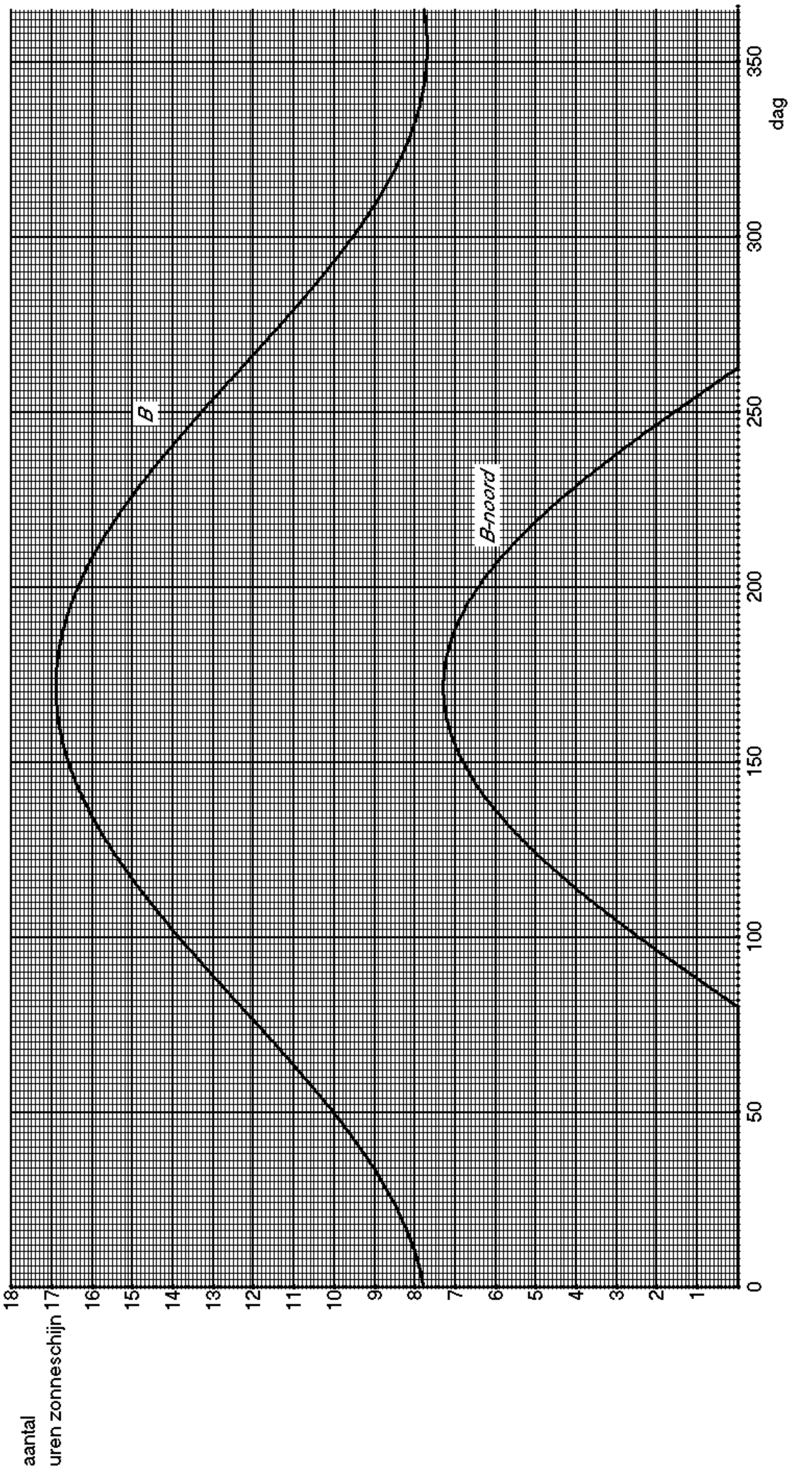
Gevels aan weerszijden van een rechthoekig gebouw kunnen niet tegelijkertijd door de zon beschenen worden. Ook is het zo dat, àls de zon schijnt, òf de noord-gevel òf de zuid-gevel zonlicht ontvangt[1].

In de grafiek op de bijlage is ook het dagelijks aantal bezonningsuren voor een noord-gevel uitgezet; zie de grafiek B-*noord*. Uit deze grafiek blijkt dat een noord-gevel slechts een gedeelte van het jaar beschenen wordt.

4p **4** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek B-*zuid* voor het dagelijks aantal bezonningsuren voor een zuid-gevel.

[1] Uiteraard geldt zoiets ook voor oost- en westgevel maar dat is hier niet van belang.

UITWERKBIJLAGE BIJ BEZONNING

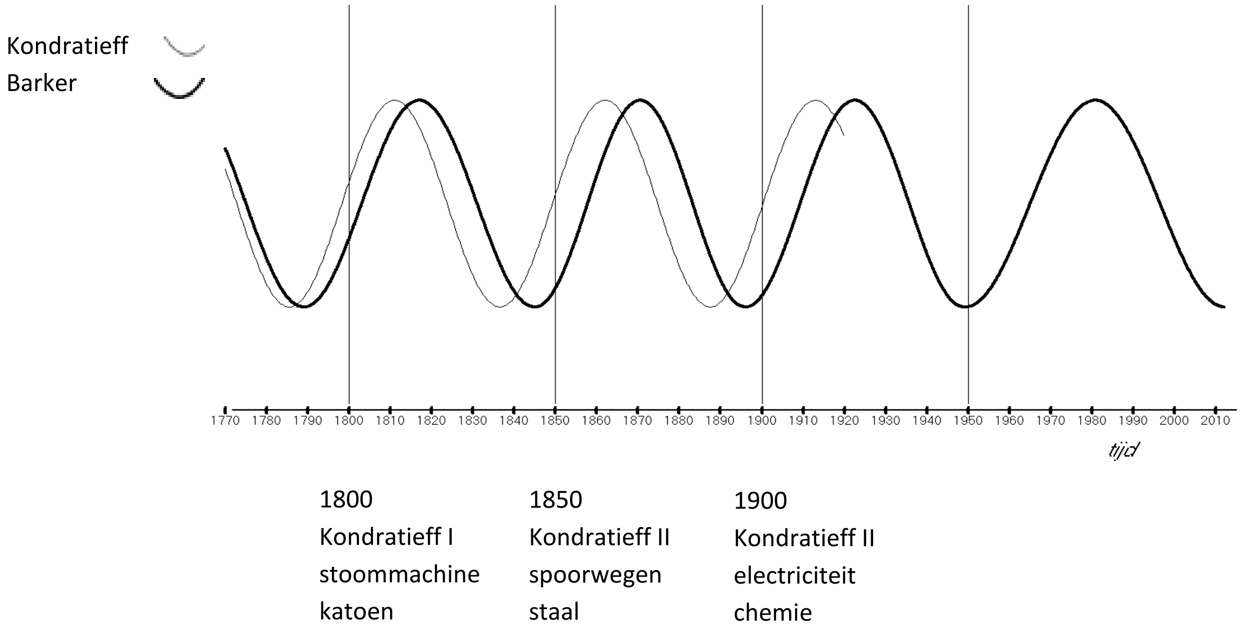


C Economische cycli

Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker

In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen. In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad *Trouw*. In figuur 1, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien. De golfbewegingen staan ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de (kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden.
In figuur 1 is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

4p **1** Laat met een redenering gebaseerd op figuur 1 zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in figuur 1 getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is.

In figuur 1 is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

4p **2** Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.

De golfbeweging volgens Barker kan vanaf het dieptepunt in 1949 benaderd worden met de formule:

$B = \sin(\frac{2\pi}{63}(t - 1965))$ met t het jaartal

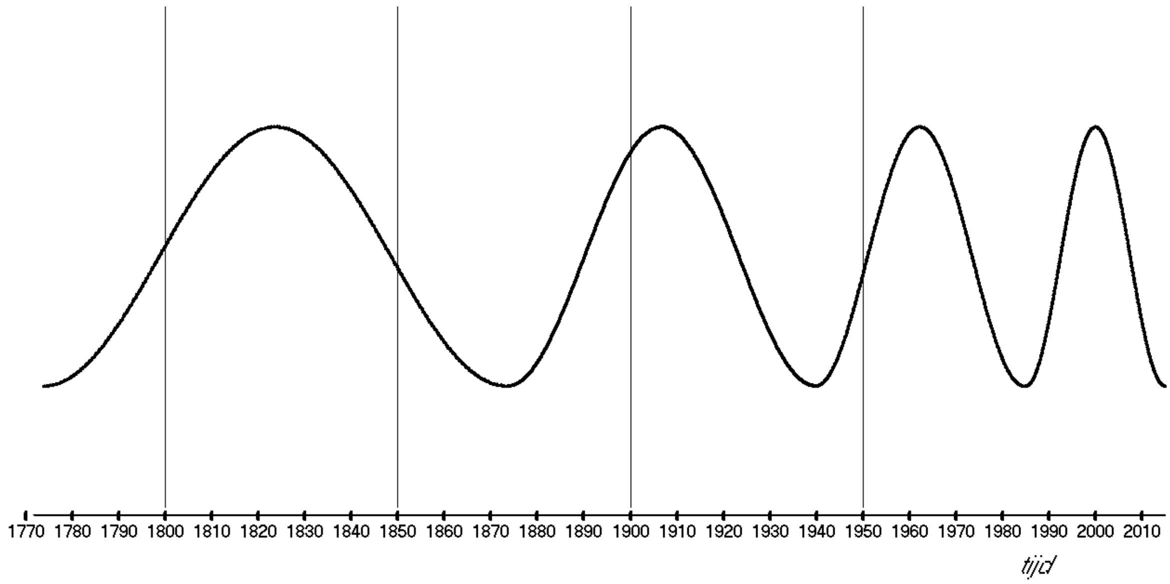
Omdat we hier alleen het stijgen en dalen van de golfbeweging bekijken, doet het er niet toe welke evenwichtsstand en welke amplitude we kiezen. In deze formule is gekozen voor evenwichtsstand 0 en amplitude 1.
Voor de golfbeweging volgens Kondratieff kan een soortgelijke formule opgesteld worden.

4p **3** Stel een formule voor de golfbeweging volgens Kondratieff op.

Golfbeweging volgens Smihula

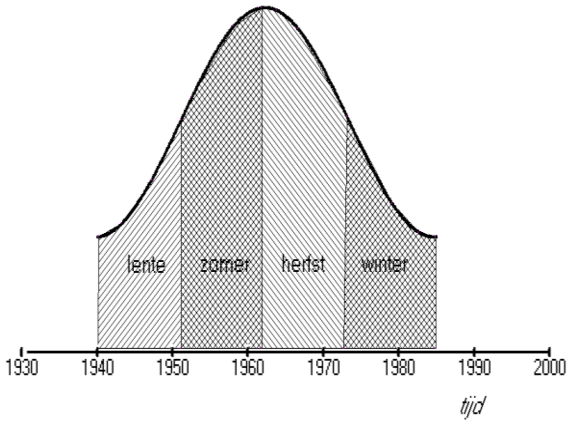
In figuur 2 is een derde grafiek getekend: de Slowaakse onderzoeker Smihula ging ook uit van golfbewegingen in de economie, maar volgens hem wordt de periode van deze golven steeds korter. Volgens Smihula begint en eindigt een golf bij een dieptepunt.

figuur 2



In onderstaande figuur 3 zie je de golf volgens Smihula tussen 1940 en 1985. De periode van deze golf is verdeeld in vier gelijke delen: deze delen worden respectievelijk lente, zomer, herfst en winter genoemd.

figuur 3



lente: invloedrijke innovatie trekt economie uit dal;
zomer: bloei van de economie tot oververhitting;
herfst: economie koelt af, koersen stijgen, inflatie daalt, zeepbel opgebouwd;
winter: zeepbel knapt, economische crisis

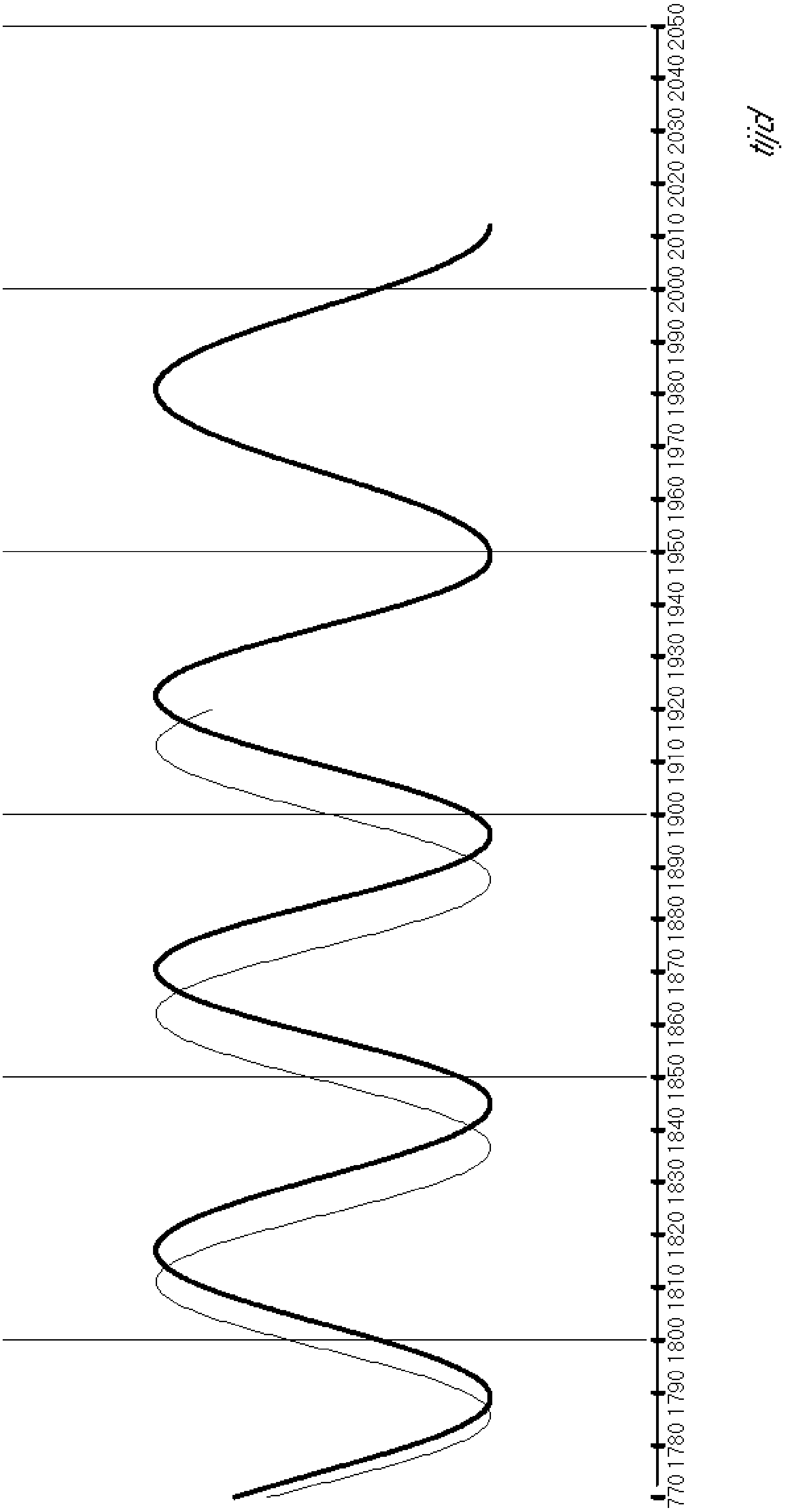
De volgende golf volgens Smihula loopt van 1985 tot 2015. De periode van deze golf is tweederde van de periode van de vorige golf. Neem aan dat dit zich na 2015 zo voortzet, dus dat elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige.

4p **4** Bereken in welk "seizoen" (lente, zomer, herfst, winter) het jaar 2040 volgens Smihula zal vallen.

Als elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige, worden de perioden op den duur erg kort. Het is de vraag of dit realistisch is.

6p **5** Bereken in welk jaar er volgens deze regelmaat voor het eerst een periode begint die korter is dan één jaar.

Uitwerkbijlage bij Economische cycli



D Wereldbevolking

De wereldbevolking neemt steeds sneller toe. In tabel 1 zijn schattingen van de Verenigde Naties en andere instanties gecombineerd.

tabel 1

jaar	**N (in miljoenen)**
1650	500
1750	795
1850	1265
1900	1656
1950	2516
2000	6000

Wetenschappers proberen formules op te stellen die N uitdrukken als functie van de tijd t.
Een voor de hand liggend idee is om een exponentiële formule te gebruiken. Een exponentiële formule die redelijk past bij de gegevens in tabel 1 is:

$N = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^t$ met t het jaartal

Voor de periode 1650-2000 geeft deze formule inderdaad aantallen die redelijk passen bij tabel 1, maar vanzelfsprekend zijn ze niet precies kloppend. Zo geeft de formule voor de jaren 1850 en 1950 aantallen die meer dan 20% boven de werkelijke aantallen liggen.

4p **1** Onderzoek voor welk van deze twee jaren de procentuele afwijking het grootst is.

Volgens sommige schattingen biedt de aarde ruimte en voedsel aan ten hoogste 20 miljard mensen.

3p **2** Onderzoek vanaf welk jaar de aarde volgens de formule te “klein” zal zijn.

Schoksgewijs exponentieel

Sommige wetenschappers vragen zich af hoeveel mensen er ooit op aarde geleefd hebben.
De Amerikaan Carl Haub schatte in 2002 dat er tot en met dat jaar ruim 100 miljard mensen op aarde geleefd hadden (of nog leefden). Hij ging daarbij uit van een rekenmodel met “schoksgewijs exponentiële toename” van de wereldbevolking. In tabel 2 zie je een gedeeltelijk overzicht van dit rekenmodel.

tabel 2

periode	groei wereldbevolking in miljoenen	groeipercentage per jaar
8000 voor Chr. tot 1 na Chr.	5-300	0,5119
1-1200	300-450	0,3379
1200-1650	450-500	0,2342
1650-1750	500-795	0,4648
1750-1850	795-1265	0,4656
1850-1900	1265-1656	0,5401
1900-1950	1656-2516	
1950-1995	2516-5760	1,8576
1995-2002	5760-6215	1,0920

In tabel 2 kun je onder andere aflezen dat volgens het model van Haub de wereldbevolking in de periode 1850-1900 jaarlijks toenam met 0,5401%, van 1265 miljoen tot 1656 miljoen. Hierbij wordt er dus van uit gegaan dat er binnen elke periode van de tabel een exponentiële groei plaatsvindt en de groeifactoren per periode kunnen verschillen.

4p **3** Bereken het ontbrekende groeipercentage in vier decimalen nauwkeurig.

Volgens het model van Haub werd de grens van 1 miljard mensen bereikt in de periode 1750-1850.

4p **4** Bereken in welk jaar dit volgens het model van Haub gebeurde.

Om een schatting te krijgen van het aantal mensen dat ooit op aarde geleefd heeft, gebruikte Haub voor elke periode in tabel 2 schattingen van de aantallen geboortes. We bekijken de aanpak van Haub voor de periode van 1995 tot en met 2002.
Voor die periode 1995-2002 kan de wereldbevolking bij benadering beschreven worden met de formule

$$N = 5760 \cdot 1,01092^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 1995, en is N de wereldbevolking in miljoenen.
Volgens redelijke schattingen werden er in deze periode jaarlijks per 1000 mensen 23 baby´s geboren. Dat betekent dat er in deze periode in totaal bijna 1 miljard baby´s geboren werden.

4p **5** Bereken het totale aantal geboortes in deze periode in miljoenen nauwkeurig.

E Koolstofdatering

Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen.

Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:

$$Q = 100 \cdot g^t$$

Hierin is Q de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14), g de jaarlijkse groeifactor en t de ouderdom van het organische materiaal in jaren.
De halfwaardetijd, ook wel halveringstijd genoemd, van C-14 is 5730 jaar. Hiermee kunnen we berekenen dat $g \approx 0,99988$.

3p **1** Bereken de waarde van g in zes decimalen nauwkeurig.

De methode van koolstofdatering is niet bruikbaar voor materiaal ouder dan 60000 jaar, omdat de hoeveelheid C-14 dan te klein is om te meten.

2p **2** Bereken hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14 nog over is na 60000 jaar. Rond je antwoord af op honderdsten van procenten.

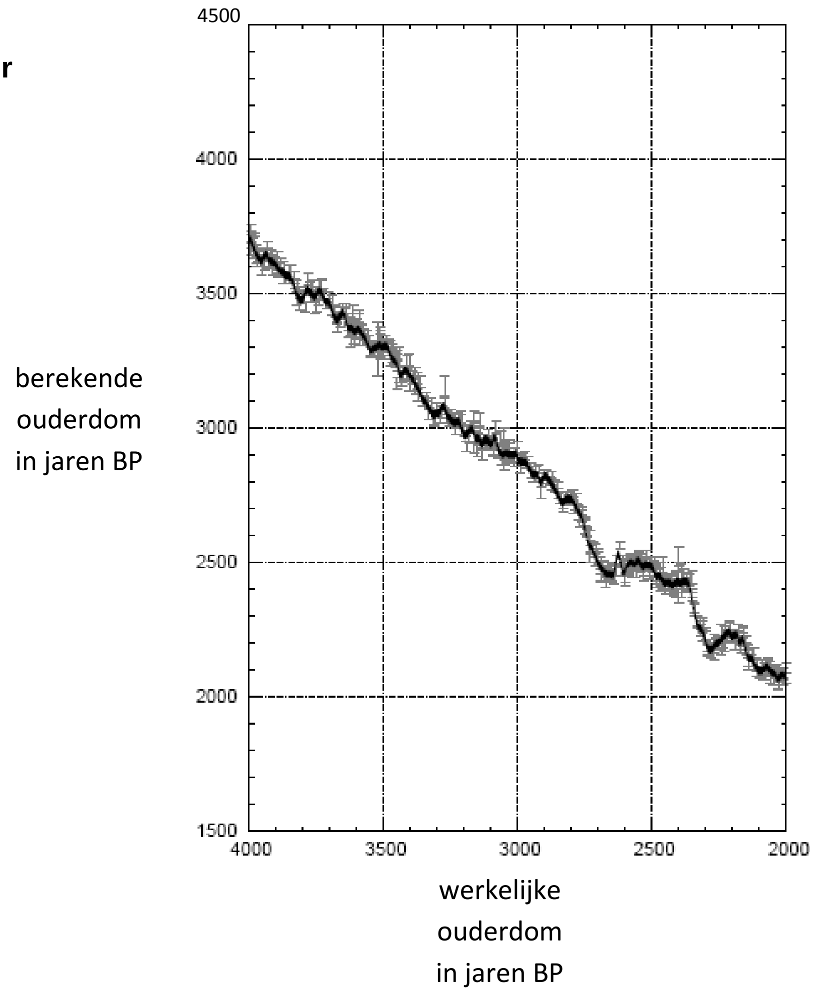
De formule $Q = 100 \cdot 0,99988^t$ kan, bij benadering, herschreven worden tot de volgende formule:

$$t = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$$

4p **3** Laat dit zien.

De ouderdom die men met de formule $t = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$ berekent, is niet de werkelijke ouderdom. In de volgende figuur zie je een gedeelte van de zogenoemde **calibratiecurve**, dat is een grafiek waarmee men de berekende ouderdom om kan zetten in de werkelijke ouderdom. Deze calibratiecurve is gemaakt door de hoeveelheid C-14 te bepalen in materiaal waarvan de ouderdom ook op een andere manier bekend was. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



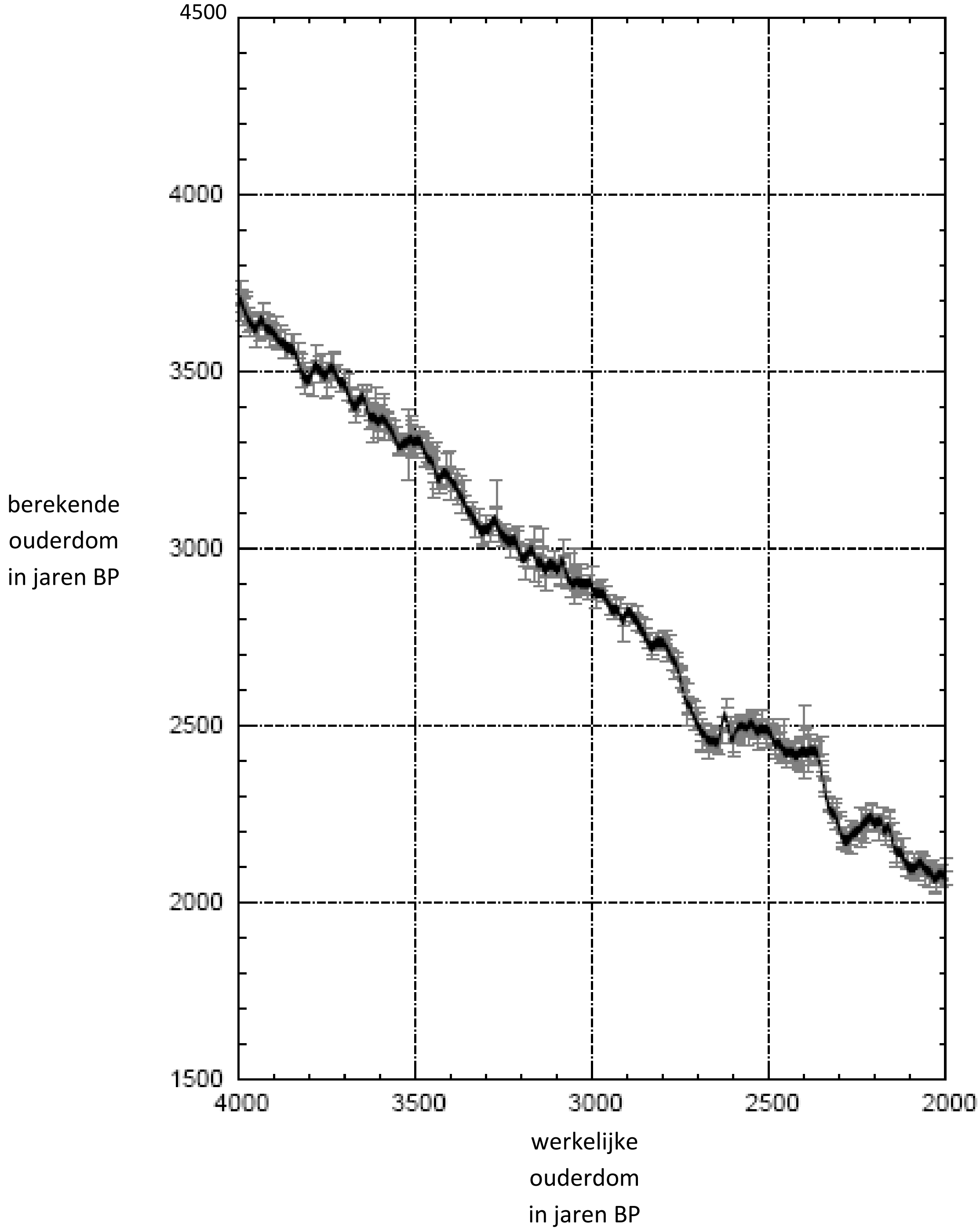
Langs de verticale as is de berekende ouderdom uitgezet. Deze wordt uitgedrukt in jaren BP, “Before Present” (vóór heden). Hiermee wordt in dit verband altijd bedoeld: het aantal jaren vóór 1950, zodat het niet nodig is te weten in welk jaar het onderzoek is gedaan. Langs de horizontale as staat de werkelijke ouderdom, ook in jaren BP, dus in jaren vóór 1950.
Bij Vlaardingen is een kano gevonden, gemaakt van een uitgeholde boomstam. Om de ouderdom van deze kano te bepalen wordt de hoeveelheid C-14 gemeten. Het blijkt dat er nog 73,19% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14.

4p **4** Bereken in welk jaar deze kano gemaakt is.

De curve van de figuur verloopt vooral rechtsonder grillig, doordat er voor deze periode veel materiaal beschikbaar was om de curve te maken. Voor het oudste deel van de calibratiecurve is niet zoveel materiaal beschikbaar. Voor een bepaald gedeelte heeft men alleen de volgende gegevens: bij een berekende ouderdom van 20 550 BP hoort een werkelijke ouderdom van 22 650 voor Chr. en bij een berekende ouderdom van 19925 BP hoort een werkelijke ouderdom van 21 925 voor Chr. Men neemt aan dat de calibratiecurve tussen deze twee punten volgens een rechte lijn verloopt.

4p **5** Bereken, uitgaande van die rechte lijn, de werkelijke ouderdom van een stuk hout waarvan de berekende ouderdom 20 100 BP is. Rond je antwoord af op tientallen jaren.

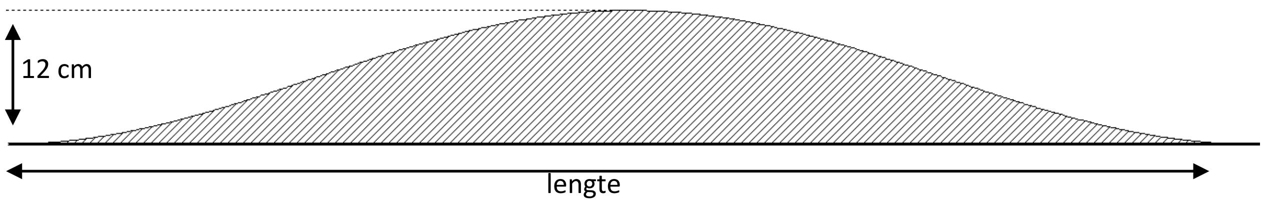
UITWERKBIJLAGE BIJ KOOLSTOFDATERING



F Verkeersdrempels

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.

figuur



Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$$h = 0,06 + 0,06\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

3p **1** Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is.

4p **2** Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

De helling van de drempel is niet overal even groot.

4p **3** Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel maximale helling heeft?

Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm:

$$h = a + b\sin\left(c(x - d)\right)$$

Ook hier is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

3p **4** Hoe groot zijn a, b, c en d?

G Berlijnse klok

In Berlijn staat op de Wittenbergplatz een bijzondere klok. Als je weet hoe het werkt, kun je er prima de tijd op aflezen. In figuur 1 staat een foto.

figuur 1

Het aflezen werkt als volgt:
- De 4 lampen in de bovenste balk staan elk voor 5 uur;
- De 4 lampen in de tweede balk staan elk voor 1 uur;
- De 11 lampen in de derde balk staan elk voor 5 minuten;
- De 4 lampen in de onderste balk staan elk voor 1 minuut.

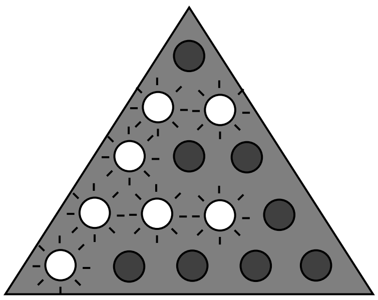
(De ronde lamp helemaal bovenaan gebruiken we hier niet.)
De lampen gaan van links naar rechts branden, telkens wanneer er een keer de bijbehorende tijdseenheid voorbij is, dus na één minuut gaat op de onderste balk de volgende lamp aan.
Wanneer er 5 minuten voorbij zijn, gaan de lampen in de onderste balk uit en gaat in de balk erboven de volgende lamp aan. Zo ook in de andere balken.
Op de klok in figuur 1 is het dus $(2\times 5+4\times 1)$ uur $+$ $(11\times 5+2\times 1)$ minuten, oftewel 14:57u.

Om middernacht is het 00:00u. Dan zijn alle lampen uit. Het is nu 13:48u.

4p **1** Bereken hoe vaak de meest rechtse lamp op de onderste balk sinds middernacht aan gegaan is.

Deze Berlijnse klok was voor Jörg Pretz aanleiding om op zoek te gaan naar een (wiskundig) mooiere klok. Hij kwam uit op de klok in figuur 2. Dit is een 12-uurs-klok.

figuur 2



De klok van figuur 2 werkt net zo als de Berlijnse klok, met kleine aanpassingen:
- De lamp in de bovenste rij staat voor 6 uur;
- De lampen in de tweede rij staan elk voor 2 uur;
- De lampen in de derde rij staan elk voor 30 minuten;
- De lampen in de vierde rij staan elk voor 6 minuten;
- De lampen in de onderste rij staan elk voor 1 minuut.

Ook op deze klok gaan de lampen van links naar rechts branden.
Op de klok in figuur 2 is het dus 2×2 uur $+ (1 \times 30 + 3 \times 6 + 1 \times 1)$ minuten , oftewel 04:49u.

In de klok in figuur 2 zie je 7 lampen branden.

4p **2** Onderzoek hoeveel tijdstippen er mogelijk zijn waarop er precies 2 lampen branden.

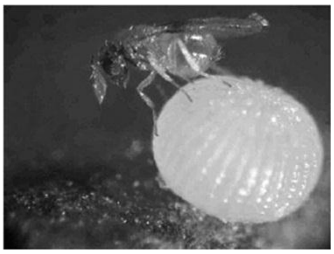
Je kunt je de vraag stellen hoe het komt dat deze klok kan werken.
Bij het beantwoorden van die vraag is het volgende van belang: met de onderste rij van 5 lampen zijn 6 mogelijke ‘minuut’-tijdstippen weer te geven: 00:00, 00:01, 00:02, 00:03, 00:04 en 00:05. Dat principe geldt voor elke rij.

5p **3** Toon door het berekenen van het aantal mogelijke ‘minuut’-tijdstippen aan dat je op deze manier met 5 rijen inderdaad precies een 12-uurs-klok kunt maken.

H Sluipwespen (ontleend aan examen wiB havo 2009, 2e tijdvak)

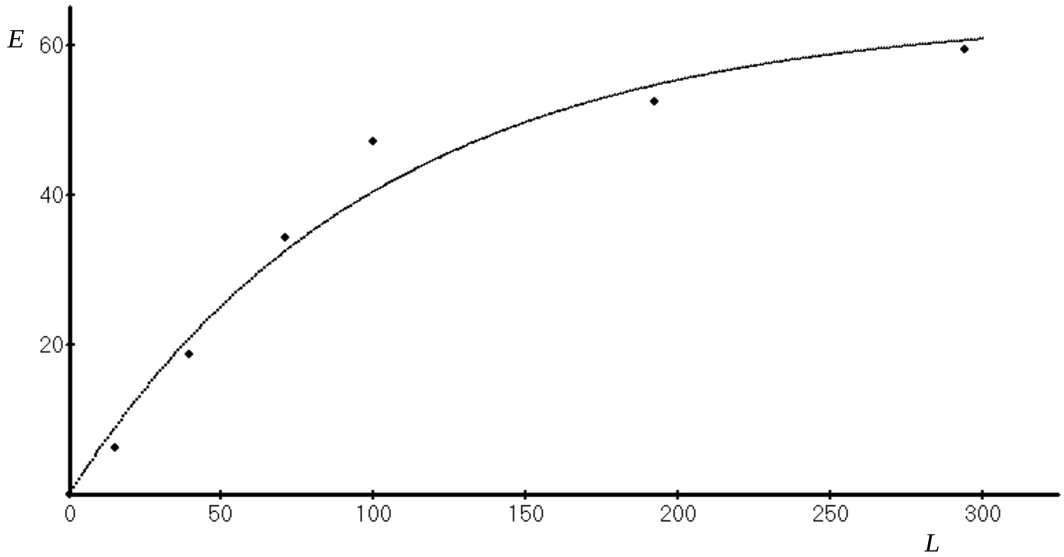
Larven kunnen grote schade toebrengen aan gewassen. Larven kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk doodgaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden.

foto



Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noemen we L. Ook werd geteld hoeveel larven er een eitje bevatten. Dit aantal wordt E genoemd. Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten zijn als stippen te zien in de figuur.

figuur



Het verband tussen E en L kan redelijk worden benaderd door de volgende formule:

$$E = 64 \cdot (1 - e^{-0,01L})$$

In de figuur zie je ook de grafiek die bij deze formule hoort. Uit de figuur valt af te lezen dat bij $L = 100$ het aantal larven met eitjes volgens de formule nogal afwijkt van het gemeten aantal larven met eitjes.

3p **1** Bereken met behulp van de formule bij $L = 100$ het verschil tussen het aantal larven met eitjes volgens de formule, afgerond op een geheel aantal larven, en het gemeten aantal larven met eitjes.

In de figuur is te zien dat het aantal larven met eitjes E steeds minder snel toeneemt als het totale aantal larven L toeneemt. Dit is ook in te zien met behulp van de afgeleide van E.

4p **2** Bepaal de afgeleide van E en toon daarmee aan dat het aantal larven met eitjes volgens de formule steeds minder snel toeneemt bij toenemend aantal larven.

De formule is een hulpmiddel om te schatten hoeveel larven maximaal per dag door één sluipwesp kunnen worden bestreden. Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes E niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.

3p **3** Geef deze grenswaarde. Licht je antwoord toe.

I Groenbelegging (ontleend aan examen wiA vwo 2007, 1e tijdvak)

Beleggingsmaatschappijen zoeken naar steeds nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.
Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

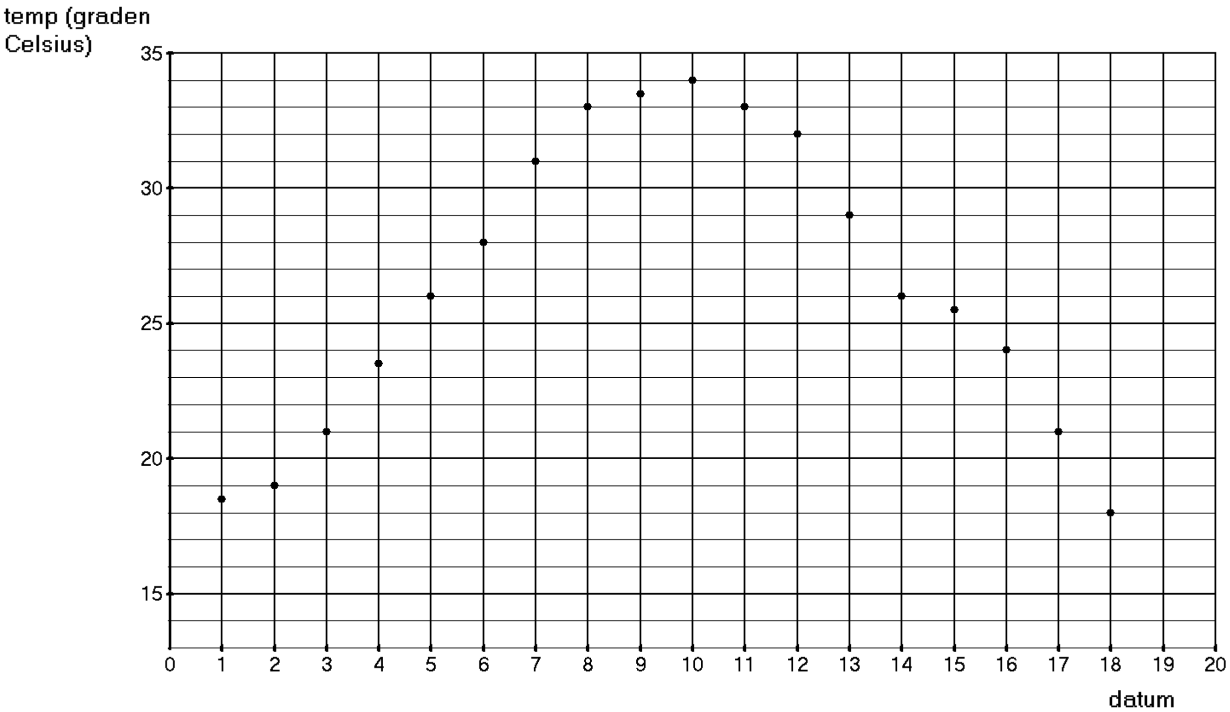
> Uw belegging groeit vanzelf.
> De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Om een idee te krijgen van de te verwachten opbrengst, geven we u het volgende schema.
> Na 8 jaar moeten 200 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 7 m en een stamdiameter van 10,8 cm.
> Na 15 jaar moeten nog eens 300 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 12 m en een stamdiameter van 13 cm.
> De eindkap volgt na 20 jaar. Dan worden van elk perceel de resterende 460 bomen gekapt. De stamdiameter van de bomen is dan toegenomen tot 16 cm en de lengte tot 15,5 m.
> De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout, D de stamdiameter van de boom in meter en L de lengte van de boom in meter.
>
> U kunt deelnemen door een bedrag in te leggen van 5000 euro per perceel. U ontvangt dan in de komende twintig jaar de opbrengst van het op dat perceel geoogste hout. Wanneer we ervan uitgaan dat de houtprijs, die voor de Labironia momenteel 600 euro per m^3 bedraagt, in de komende jaren niet zal stijgen, is deze belegging de moeite waard. Zelfs als U de gelden die na 8 jaar en na 15 jaar vrijkomen in een oude sok bewaart (en dus niet wegzet op bijvoorbeeld een spaarrekening), is de opbrengst in totaal meer dan wanneer U de inleg twintig jaar lang op een spaarrekening met 8% rente per jaar zou hebben gezet.

7p **1** Onderzoek of deze laatste bewering klopt en bereken welk rentepercentage je op een spaarrekening zou moeten krijgen om na twintig jaar minstens een even hoge opbrengst te hebben als met deze groenbelegging.

J Productie en temperatuur (ontleend aan examen wiA vwo 1987, 2e tijdvak)

Op een industrieterrein wordt elke dag de maximumtemperatuur gemeten. In onderstaande grafiek zijn de meetresultaten voor juni 2010 weergegeven.

grafiek



Een groot bedrijf op dit industrieterrein produceert materiaal. De productie van dit materiaal is afhankelijk van de buitentemperatuur. In onderstaande tabel kun je terugvinden hoeveel er per dag in diezelfde periode geproduceerd is (in tonnen).

tabel

dag	datum	productie	dag	datum	productie	dag	datum	productie
			ma	7 juni	1007	ma	14 juni	1012
di	1 juni	1032	di	8 juni	1004	di	15 juni	1017
wo	2 juni	1030	wo	9 juni	1002	wo	16 juni	1021
do	3 juni	1026	do	10 juni	1001	do	17 juni	1026
vr	4 juni	1022	vr	11 juni	1001	vr	18 juni	1029

Een medewerker van de afdeling planning wil het verband tussen de maximumtemperatuur T en de productie P bestuderen. Hij wil daarbij dit verband in een zo eenvoudig mogelijke en goed passende formule uitdrukken.

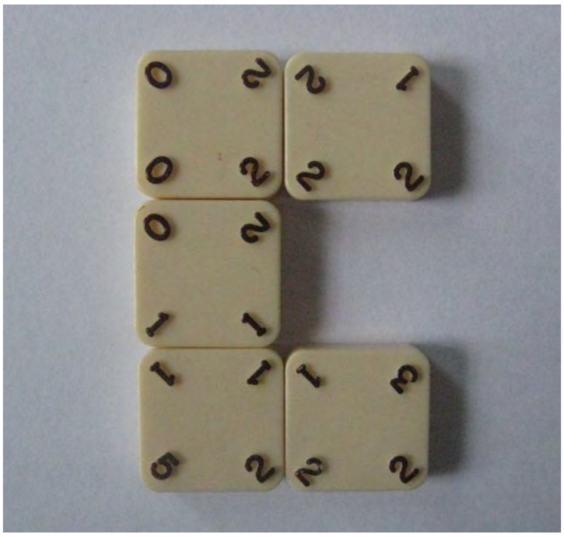
8p **1** Stel een dergelijke formule op en licht je antwoord toe.

K Quadominos

Het spel Quadominos bestaat uit vierkante stenen. Zie foto 1. Op elke steen staan vier cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5.
Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen. In foto 2 zie je daar een voorbeeld van.

foto 1

foto 2



Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor, behalve één: er is geen steen met de cijfers 0, 2, 4 en 5.

Je kunt de stenen in vijf soorten verdelen:
- stenen met vier dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-3
- stenen met precies drie dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-4 in foto 1 (links)
- stenen met twee keer twee dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 0-0-2-2 in foto 1
- stenen met twee dezelfde en daarnaast twee verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-1-0-2 in foto 1 (boven)
- stenen met vier verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-2-3-5 in foto 1 (boven)

.
Van elke combinatie van vier toegestane cijfers zit er in het spel slechts één steen. Er zit bijvoorbeeld dus maar precies één steen in met de cijfers 1-1-0-2.

8p **1** Onderzoek hoeveel stenen er in totaal zijn bij het spel Quadominos.

L **Elektriciteit** (ontleend aan examen wiA1 vwo 2007, 2e tijdvak)

In november 2004 maakte energiebedrijf Essent de tarieven voor de levering van elektriciteit bekend voor het jaar 2005. Zie onderstaande tabel.

tabel
Elektriciteitstarieven 2005

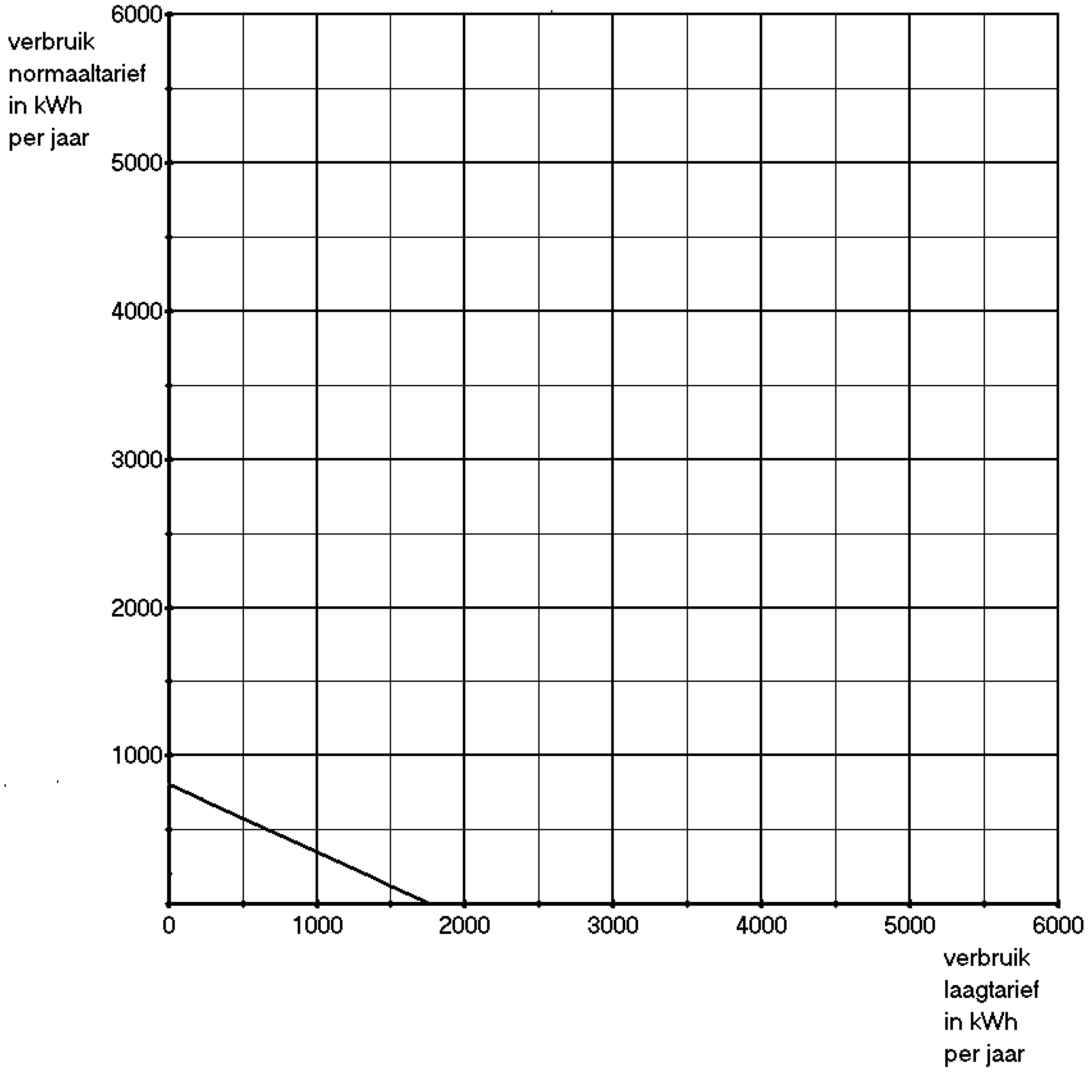
	vaste kosten per jaar	**laagtarief kWh-prijs**	**normaaltarief kWh-prijs**
KeuzeTarief Budget	€ 0,00	€ 0,0520	€ 0,0970
KeuzeTarief Standaard	€ 17,85	€ 0,0419	€ 0,0749
KeuzeTarief Plus	€ 35,70	€ 0,0364	€ 0,0743

Zoals je kunt zien, kunnen klanten bij Essent kiezen uit drie tarieven.
Essent kent tarieven voor huishoudens die een elektriciteitsmeter gebruiken waarmee onderscheid wordt gemaakt tussen laagtarief en normaaltarief.
Het laagtarief wordt berekend voor elektriciteitsverbruik in het weekend en ’s nachts van 23:00 tot 7:00 uur, het normaaltarief op de andere tijden.
Alle bedragen zijn inclusief BTW.
Een huishouden kan kiezen uit een van de drie tarieven. Afhankelijk van het verbruik en de momenten waarop verbruikt wordt, is voor het ene huishouden het ene keuzetarief het voordeligste en voor het andere huishouden het andere.

Een energieadviseur maakt een voorlichtingsfolder om daarbij met een figuur duidelijk te maken bij welke combinaties van laag- en normaaltariefverbruik (op jaarbasis) welk keuzetarief het voordeligst is. Hij wil daarin gebieden aangeven waar een bepaald tarief het voordeligst is. Hij gebruikt daarvoor het assenstelsel op de uitwerkbijlage. Hij heeft daarop al een lijnstuk getekend. Op dat lijnstuk liggen alle punten waarbij keuzetarief Budget en keuzetarief Standaard precies even duur zijn.

7p **1** Geef in het assenstelsel op de uitwerkbijlage drie **gebieden** aan waarin telkens één van de drie keuzetarieven het voordeligst is. Licht je antwoord toe.

UITWERKBIJLAGE BIJ ELEKTRICITEIT



Examen VWO

2012

tijdvak 1
dinsdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES volgens syllabus pilot

Differentiëren

naam van de regel	**functie**	**afgeleide**
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Schroefas

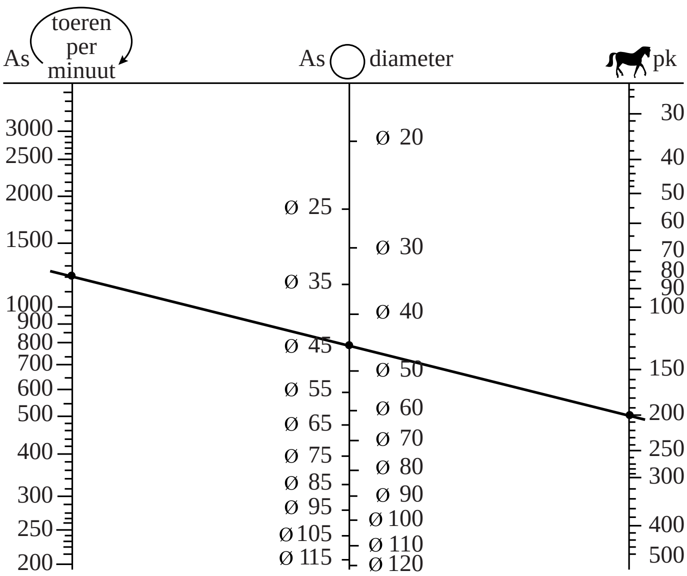
Een belangrijk onderdeel van een boot is de schroefas. Deze as wordt door de motor in beweging gebracht. Daardoor gaat de schroef van het schip draaien en dan kan de boot varen. De motor, de schroefas en de schroef samen noemen we hier het **aandrijfsysteem** van de boot.

foto
het plaatsen van een schroefas

De minimale diameter van de schroefas die nodig is, hangt af van de prestaties die de motor van deze boot kan leveren. In figuur 1 zie je een grafiek om de minimale diameter van de as vast te stellen. Figuur 1 vind je ook vergroot op de uitwerkbijlage.
In dit zogenoemde nomogram zie je drie schalen:
- de linkerschaal: het aantal toeren (of omwentelingen) per minuut (tpm). Dit wordt ook wel het toerental genoemd;
- de middelste schaal: de diameter van de schroefas, gemeten in mm;
- de rechterschaal: het vermogen, uitgedrukt in paardenkracht (pk).

Zoals je kunt zien, is elk van de drie schalen niet-lineair.

figuur 1



Wanneer je een lijn trekt door de drie schalen kun je een van de drie waarden bepalen als je de andere twee weet. Zo hoort volgens figuur 1 bij een motor van 200 pk en 1200 tpm een asdiameter van (ten minste) 45 mm.

Python-Drive is een bedrijf dat aandrijfsystemen maakt. Op hun website staat dat alle systemen van het type P60-K (70 pk, 2600 tpm) een asdiameter hebben tussen 30 en 40 mm.

3p **1** Onderzoek met behulp van figuur 1 op de uitwerkbijlage of de asdiameter van dit type groot genoeg is.

In het voorbeeld in figuur 1 zie je een motor van 200 pk en 1200 tpm met een bijbehorende asdiameter van 45 mm. Er zijn ook wel motoren te vinden met een ander vermogen en een ander toerental waarbij dezelfde asdiameter van 45 mm hoort. Dan valt op dat een groter vermogen een hoger toerental oplevert.

3p **2** Leg uit hoe je dat in figuur 1 kunt zien.

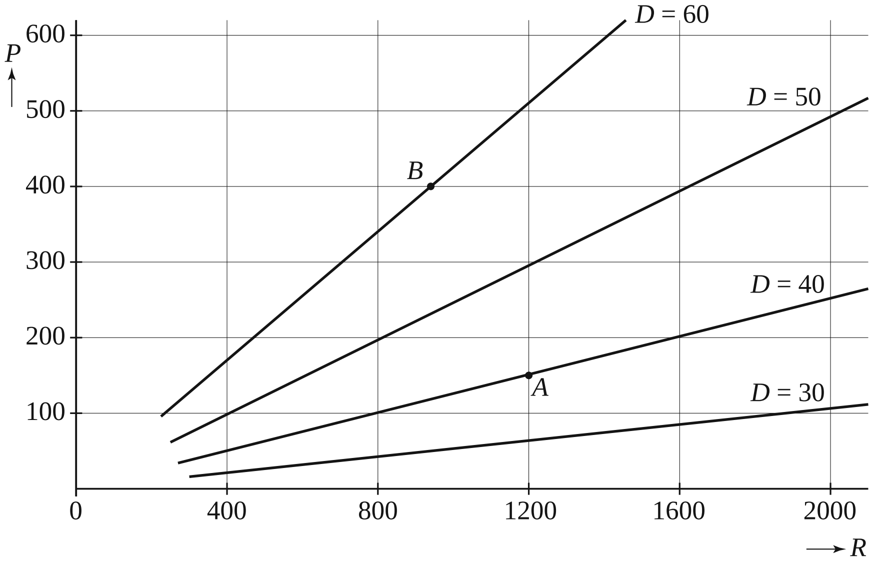
Lloyd's is een organisatie die zich bezighoudt met het opstellen van regels voor de controle op de zeewaardigheid van schepen. Volgens een van deze regels moet de diameter D van de schroefas voldoen aan de volgende formule:

$$D = 79,78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$$

In deze formule is D uitgedrukt in mm, het vermogen P uitgedrukt in pk en het toerental R in tpm.

In een tijdschrift dat gaat over aandrijfsystemen kun je figuur 2 tegenkomen. In deze figuur zie je voor enkele waarden van D het verband getekend tussen de bijbehorende waarden van P en R.

figuur 2



In zo'n figuur kan elk aandrijfsysteem met een punt worden weergegeven. Zo hoort het punt A bij het aandrijfsysteem met waarden (1200, 150, 40).

In figuur 2 is punt B aangegeven. Bij dit aandrijfsysteem is het vermogen goed af te lezen. De waarde van het toerental is echter niet nauwkeurig af te lezen, maar met behulp van de formule kunnen we deze wel berekenen.

4p **3** Bereken met behulp van de formule het toerental dat bij dit aandrijfsysteem hoort.

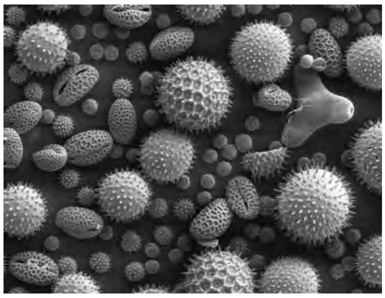
In enkele gevallen komt het voor dat de asdiameter al bekend is, bijvoorbeeld wanneer alleen de motor moet worden vervangen. Dan is het handig om de formule $D = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$ anders te schrijven.

We gaan uit van een asdiameter van 30 mm.

4p **4** Herschrijf de formule hierboven zo dat je een formule krijgt waarin P uitgedrukt wordt in R.

Hooikoorts

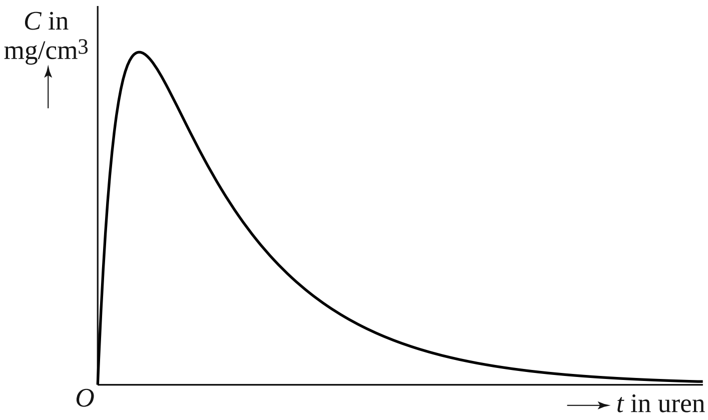
foto
uitvergrote pollen



Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. Iemand die last heeft van hooikoorts, reageert op zogenoemde pollen in de lucht, die afkomstig zijn van bomen en grassen die in bloei staan. De allergische reactie veroorzaakt naast irritatie aan ogen, neus en keel ook hoest- en niesbuien.

PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht.
Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C. In figuur 1 zie je een schets van de grafiek van C.

figuur 1



Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:

$$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2 + 60}$$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uren na het innemen van de pil.

6p **5** Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof:

$$C_2(t) = 0{,}13\left(\mathrm{e}^{-0{,}65t} - \mathrm{e}^{-3{,}9t}\right)$$

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t weer de tijd in uren na het innemen van de pil.

Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

6p **6** Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens **beide** formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

Hoewel de grafieken van C_1 en C_2 beide erg op de grafiek in figuur 1 lijken, verschillen de momenten waarop het maximum bereikt wordt wel van elkaar.

6p **7** Onderzoek met behulp van de afgeleide C'_2 of het maximum van C_2 eerder of later dan het maximum van C_1 optreedt.

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Als je niet voldoende waardepunten hebt gespaard voor een product, dan kun je een bedrag bijbetalen en zo het product toch aanschaffen.

Marjolein heeft 3600 punten gespaard. Ze wil haar theeservies uitbreiden en kan kiezen uit:

Theeglas	700 punten
Theelepeltje	450 punten
Theekop en schotel	600 punten

Ze wil al haar punten uitgeven en niets bijbetalen. Het blijkt dat er dan 4 verschillende combinaties mogelijk zijn.

4p **8** Welke verschillende combinaties van artikelen kan Marjolein met precies 3600 punten aanschaffen? Licht je antwoord toe.

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

foto

Voorbeeld
Kop en schotel van hiernaast kosten samen € 5,-.
Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50.
Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

4p **9** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Er zijn ook andere spaarsystemen te bedenken, bijvoorbeeld een systeem waarbij klanten die veel punten sparen daarvoor iets meer beloond worden. Zo bedenkt Alwin, een wiskunde A-leerling uit 6V, een ander systeem. Zie de tabel.

tabel

aantal punten	100	1100	2100	3100	5100	7100	9100
waarde in euro’s	1,50	2,14	3,06	4,37	8,90	18,15	37,01

Je kunt in de tabel zien dat er geen lineair verband is tussen het aantal punten en de waarde in euro’s.

In het systeem van Alwin is er sprake van een (bij benadering) exponentieel verband.

4p **10** Laat voor alle waarden in de tabel zien dat er inderdaad (bij benadering) sprake is van een exponentieel verband en bereken de groeifactor per 1000 punten in drie decimalen nauwkeurig.

Behendigheid

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat.
Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is. De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:

- het **toevalseffect** TE
- het **leereffect** LE

Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel.
Beide getallen, toevalseffect TE en leereffect LE, zijn (natuurlijk) nooit negatief. Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.
Hoe die getallen TE en LE bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendigheidsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B.

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect;
4. Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect.

3p **11** Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

De bovenstaande formule voor B is ook te schrijven als $B = 1 - \dfrac{TE}{LE + TE}$.

3p **12** Toon aan dat deze formule ook geschreven kan worden als $B = 1 - \dfrac{TE}{LE + TE}$.

Om de vierde bewering “Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect” na te gaan, kun je gebruik maken van de formule $B = 1 - \dfrac{TE}{LE + TE}$.

3p **13** Leg met behulp van $B = 1 - \dfrac{TE}{LE + TE}$ uit dat de vierde bewering inderdaad juist is.

Om het behendigheidsniveau van een spel te bepalen moet je dus een methode vaststellen om TE en LE van dat spel te berekenen. Borm en Van der Genugten hebben dat bij verschillende spelen gedaan en hebben daarna ook een grens vastgesteld waarmee ze een onderscheid konden maken tussen een kansspel en een behendigheidsspel. Die grens ligt volgens de onderzoekers bij $B = 0{,}20$. Als B groter is dan 0,20 heb je te maken met een behendigheidsspel.
Deze grens van 0,20 betekent dat in een kansspel het leereffect wel een rol mag spelen, maar niet te veel. Het leereffect moet beduidend kleiner zijn dan het toevalseffect.

Op 3 maart 1998 concludeerde de Hoge Raad dat poker een kansspel is (en daarom alleen mag worden gespeeld in door de overheid gecontroleerde casino’s).

foto
pokeren een kansspel?

De onderzoekers hebben in samenwerking met het televisieprogramma Nieuwslicht een experiment uitgevoerd om na te gaan of deze beslissing van de Hoge Raad wel terecht was. In het verslag over dit experiment schrijven zij op welke manier zij het behendigheidsniveau van het pokerspel ‘Texas Hold’Em’ hebben bepaald. Zij deelden de spelers in drie typen in:

– de beginner, die alleen de regels van het spel kent (zijn winst in het spel wordt alleen door geluk bepaald);
– de ervaren speler, die veel ervaring heeft met het spel (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde);
– de fictieve speler[1], een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten de andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel zullen komen te liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald).

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten TE en LE:

$$TE = \text{winst van de fictieve speler} - \text{winst van de ervaren speler}$$

$$LE = \text{winst van de ervaren speler} - \text{winst van de beginner}$$

3p **14** Leg uit dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

In een ander experiment, vergelijkbaar met dat van Nieuwslicht, speelden een beginner, een ervaren speler en een fictieve speler aan aparte tafels onder dezelfde omstandigheden elk drie rondes. Allen kregen bij het begin van iedere ronde evenveel geld om in te kunnen zetten. Na die drie rondes werd de stand opgemaakt van de winst per ronde. Zie de tabel.

tabel
winst per ronde in euro’s

	beginner	**ervaren speler**	**fictieve speler**
ronde 1	–28	–11	10
ronde 2	30	90	161
ronde 3	–32	1	219

Om na te gaan of poker wel of niet als kansspel gezien moet worden, kun je de totale winst van ieder van de drie spelers in de tabel berekenen en daarmee het behendigheidsniveau B bepalen van het pokerspel ‘Texas Hold’Em’.

3p **15** Is het pokerspel ‘Texas Hold’Em’ volgens de methode van Borm en Van der Genugten een kansspel als je uitgaat van de tabel? Licht je antwoord toe.

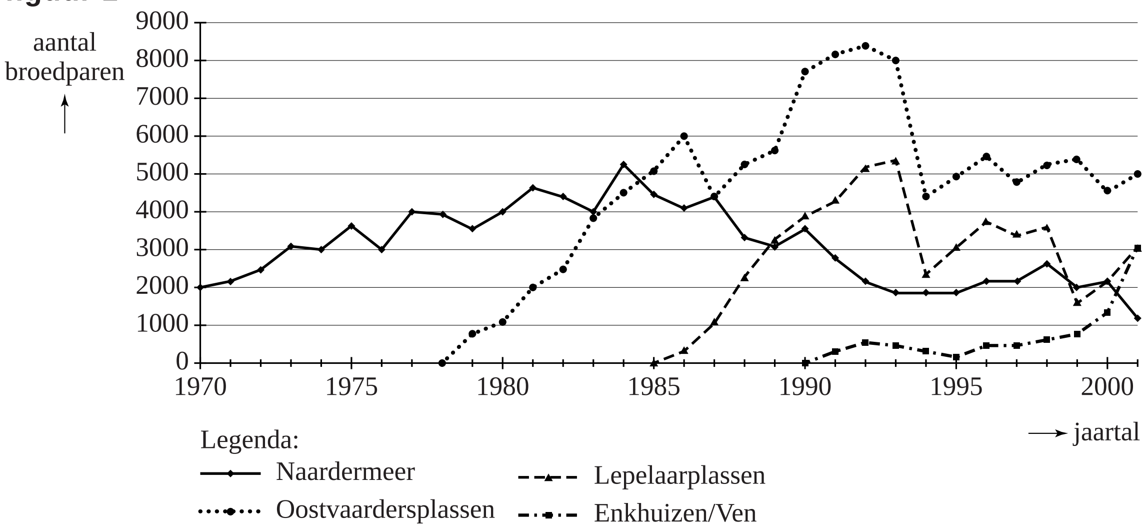
noot 1 Die fictieve speler bestond alleen in dit experiment: hij verkreeg zijn extra informatie door het gebruik van een ‘oortje’ waarmee hem informatie doorgegeven werd die in een normaal spel onbekend is voor een speler.

Aalscholvers

Op de foto hiernaast zie je een aalscholver. Aalscholvers leven in de buurt van meren en voeden zich met vis.
In figuur 1 zie je de aantallen broedparen van vier verschillende kolonies (groepen) aalscholvers. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

foto

figuur 1

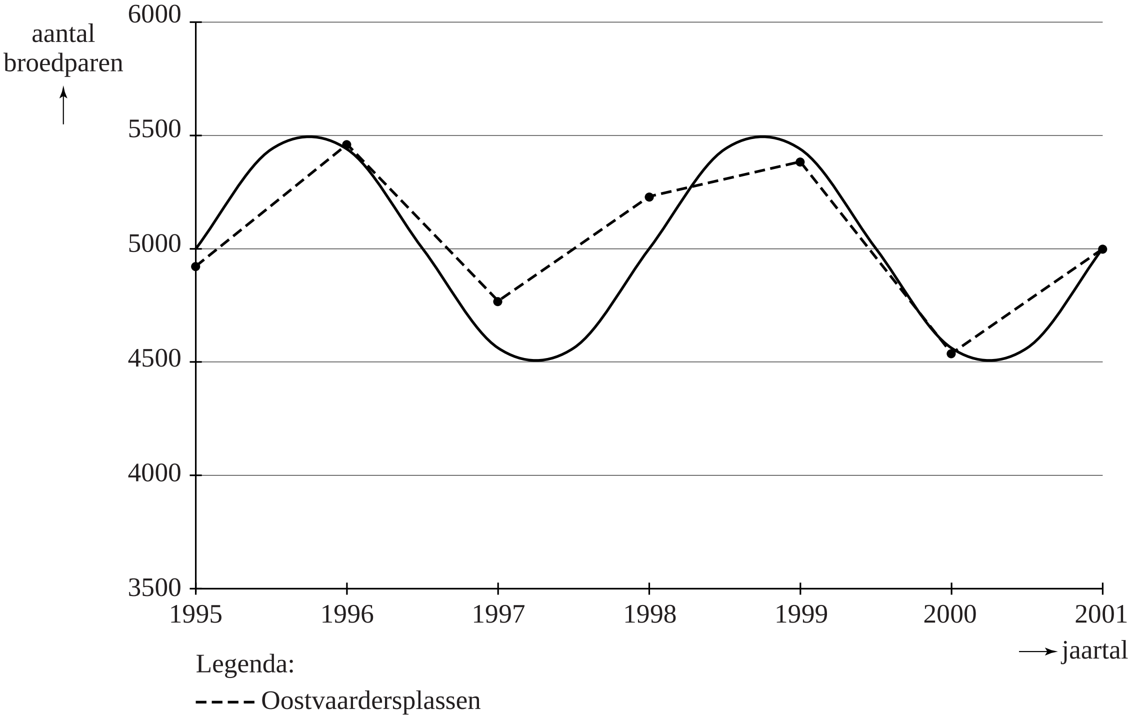


In 1978 verschenen de eerste aalscholvers bij de Oostvaardersplassen en in 1985 bij de Lepelaarplassen. Beide kolonies vertoonden in het begin een periode van snelle groei, namelijk de periode 1978-1992 voor de Oostvaardersplassenkolonie en de periode 1985-1993 voor de Lepelaarplassenkolonie. We vergelijken de gemiddelde groei per jaar in de periode 1978-1992 voor de Oostvaardersplassenkolonie met de gemiddelde groei per jaar in de periode 1985-1993 voor de Lepelaarplassenkolonie. De terugval in 1987 doet vermoeden dat de gemiddelde groei per jaar van de aantallen in de Oostvaardersplassenkolonie kleiner zal zijn dan die in de Lepelaarplassenkolonie.

4p **16** Onderzoek met een berekening of dit inderdaad zo is en geef aan hoe je dit zonder berekening ook in de grafiek kunt zien. Gebruik daarbij de uitwerkbijlage.

Na een sterke terugval in 1994 vertonen de aantallen in de Oostvaardersplassenkolonie een periodieke schommeling. Zie figuur 2. Zo'n schommeling kan bijvoorbeeld ontstaan doordat een slecht broedseizoen gevolgen heeft voor een aantal jaren later, als deze vogels volwassen worden en zelf jongen krijgen.

figuur 2

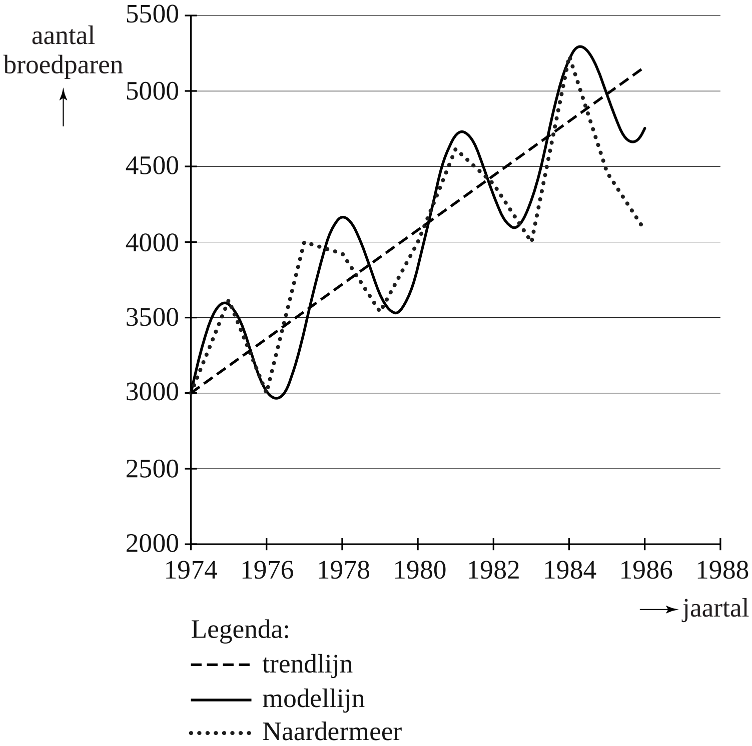


Men kan de aantallen broedparen van de Oostvaardersplassenkolonie van 1995 tot en met 2001 benaderen met een sinusfunctie. In figuur 2 zie je de grafiek van deze sinusfunctie.

4p **17** Stel een formule op die de sinusgrafiek van figuur 2 zo goed mogelijk benadert. Neem t in jaren met $t = 0$ in 1995. Licht je antwoord toe.

De kolonie bij het Naardermeer bestaat al langer. In de periode van 1974 tot en met 1985 is hier ook een schommeling van de aantallen te zien. Bovendien nemen de aantallen langzaam toe. In figuur 3 is de ontwikkeling van de aantallen benaderd met een modellijn. Figuur 3 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 3



Bij de modellijn kan men een formule opstellen van de vorm:

$$N = p + q \cdot t + a \cdot \sin(b \cdot t)$$

Hierin is t in jaren met $t = 0$ in 1974.
Het gedeelte $p + q \cdot t$ betekent dat de evenwichtsstand niet constant is, maar stijgt volgens een rechte lijn: de trendlijn. De waarden van p, q, a en b in deze formule kan men met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage berekenen.

6p **18** Bereken de waarden van p, q, a en b.

Topjaar voor appel en peer

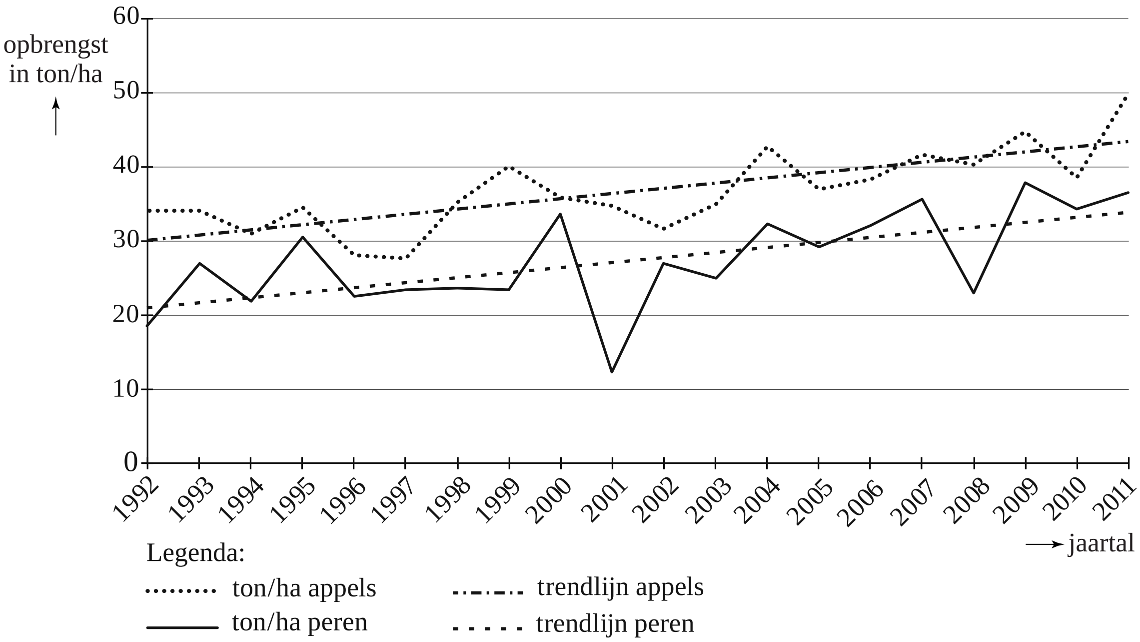
In september 2011 meldde het CBS dat de verwachtingen voor de appeloogst en de perenoogst voor 2011 erg gunstig waren. Men verwachtte dat de totale opbrengst van de appelteelt in Nederland circa 400 miljoen kilogram zou zijn. Voor de totale perenopbrengst hield men rekening met een slordige 300 miljoen kilogram.

In deze opgave houden we ons bezig met de opbrengst van beide fruitsoorten door de jaren heen. We gebruiken daarvoor twee aspecten: de gemiddelde opbrengst in ton (1000 kg) per hectare van een fruitsoort en de totale oppervlakte van de boomgaarden van een fruitsoort.

In onderstaande figuur, ook afkomstig van het CBS, zie je de opbrengst in ton per hectare voor ieder jaar vanaf 1992 tot en met 2011 weergegeven, zowel voor appels als peren. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur

Opbrengst appels en peren in ton per hectare



Uit de figuur blijkt dat de opbrengst per hectare van zowel appels als peren een stijgende trend vertoont. Deze trend zou je kunnen beschrijven met een lineair verband door een rechte lijn te trekken die de gegevens redelijk benadert. In de figuur zijn die trendlijnen getrokken voor de opbrengst van appels in ton per hectare en de opbrengst van peren in ton per hectare.

Hieronder een citaat uit een publicatie van het CBS:

Oppervlakte appelbomen in bijna 20 jaar meer dan gehalveerd

De oppervlakte appelbomen daalde in 2011 tot 8,4 duizend hectare en is nog maar twee procent groter dan de oppervlakte perenbomen. De oppervlakte perenbomen steeg in 2011 tot 8,2 duizend hectare. In 1992 was er nog 17 duizend hectare beplant met appelbomen. De oppervlakte perenbomen is in diezelfde periode met 50 procent toegenomen. Als de ontwikkeling van de afgelopen jaren doorzet, zal de oppervlakte perenbomen in Nederland in 2012 voor het eerst groter zijn dan de oppervlakte appelbomen.

Uit dit citaat valt te concluderen dat de oppervlakte perenbomen stijgt terwijl die voor appelbomen daalt. Ook deze trends kun je lineair benaderen. De oppervlakte perenbomen is waarschijnlijk al in 2012 groter dan de oppervlakte appelbomen. Dat geldt niet voor de totale opbrengst. Het zal nog wel even duren voordat de totale opbrengst van peren groter is dan die van appels.

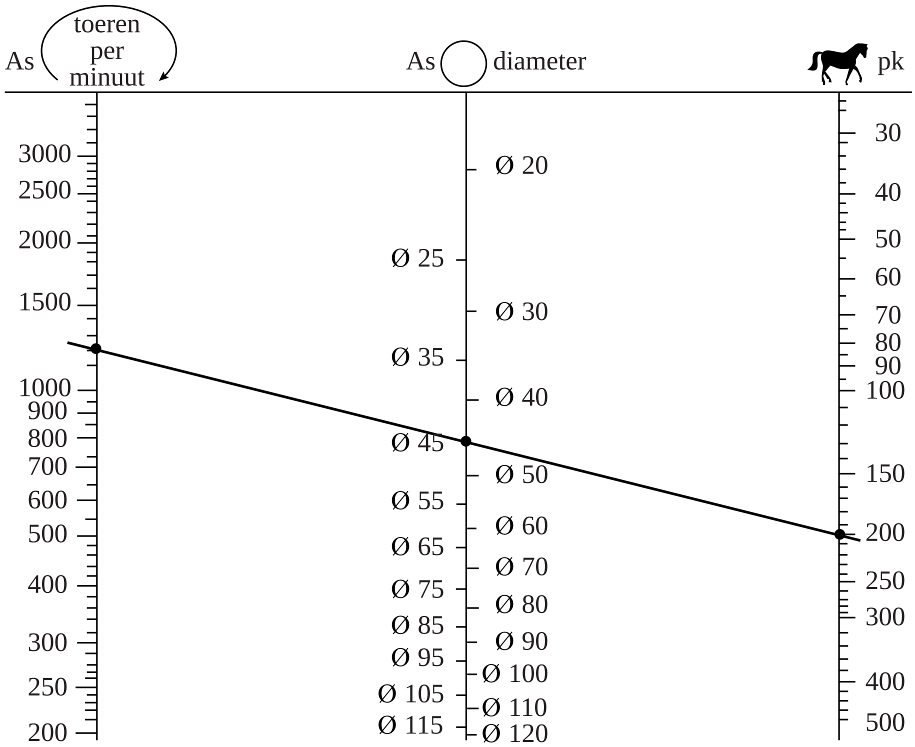
We gaan er in deze opgave van uit dat de trends alle vier lineair zijn.

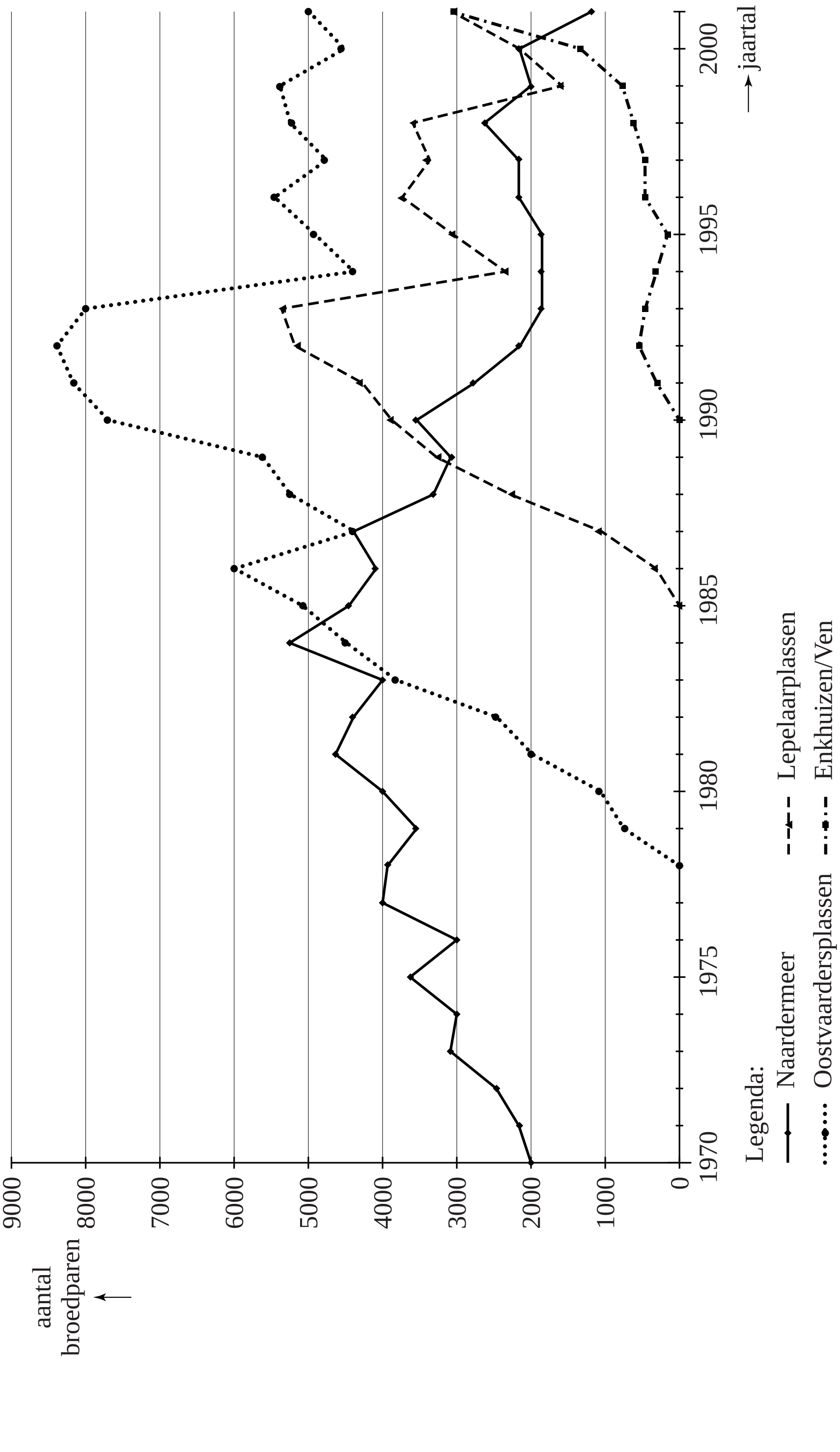
8p **19** Onderzoek, uitgaande van bovengenoemde trendmatige ontwikkelingen, in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan de totale appelopbrengst. Maak eventueel gebruik van de figuur op de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

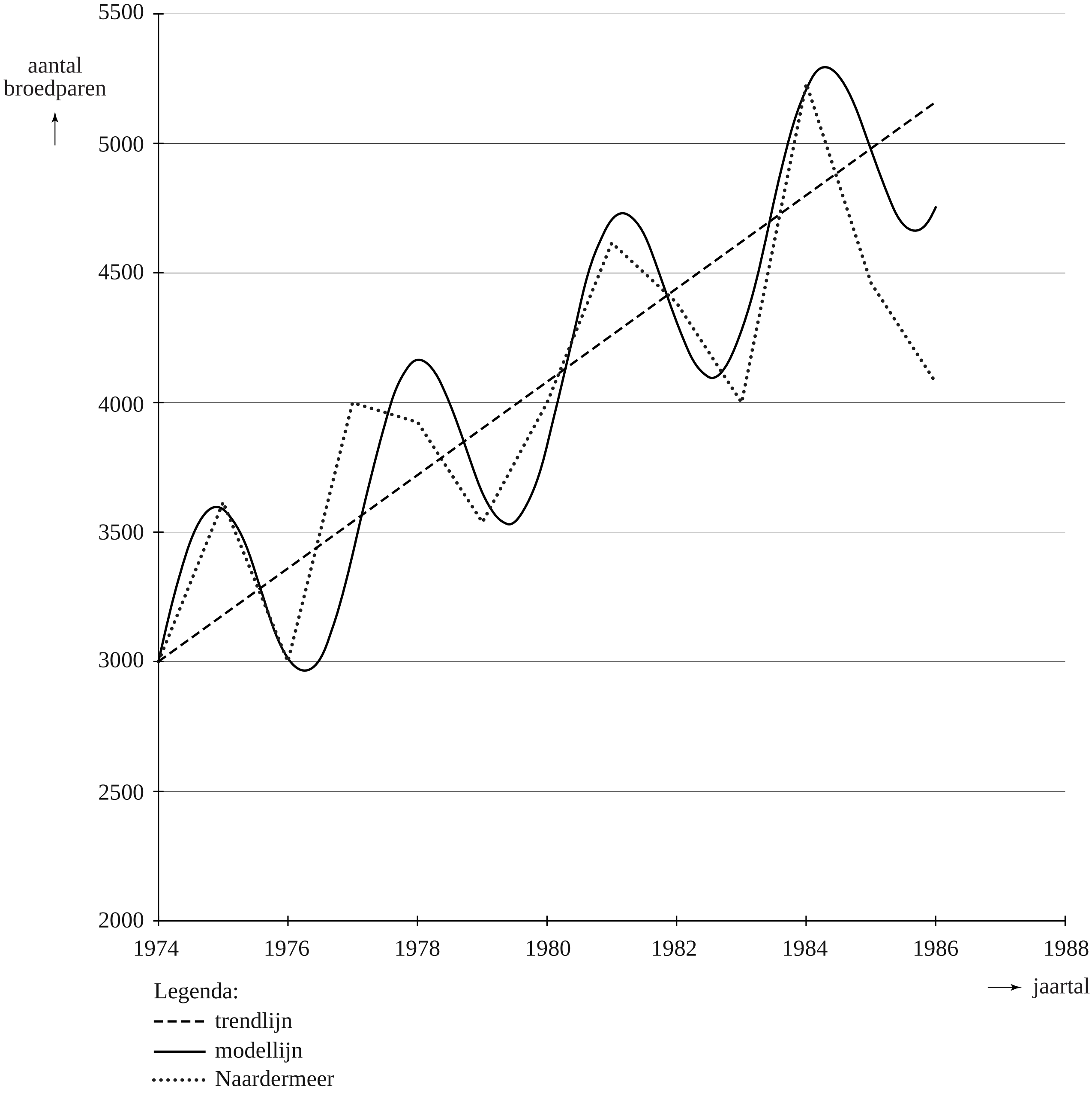
Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ______________

1



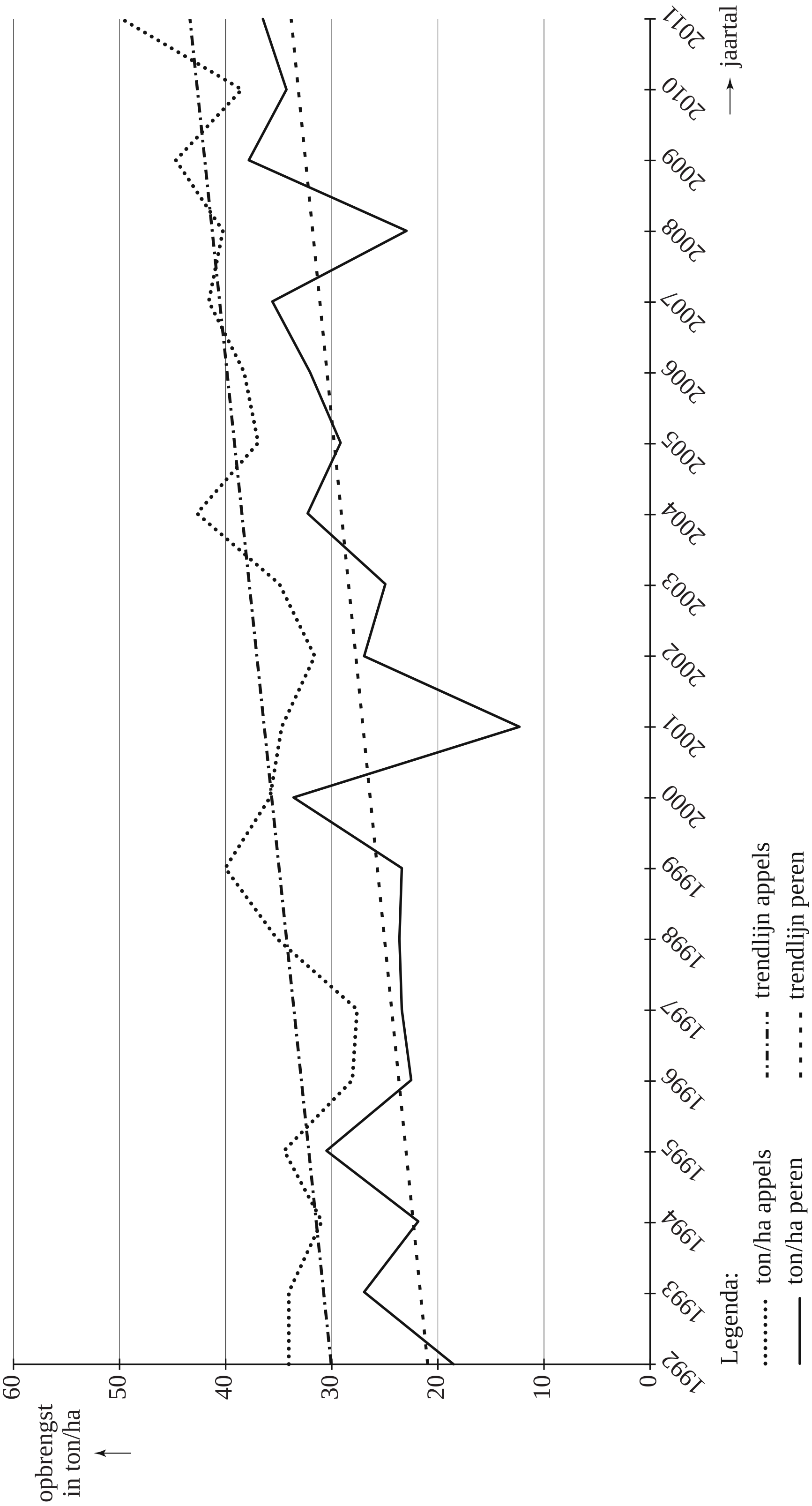

aantal broedparen
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
jaartal
Legenda:
Naardermeer
Oostvaardersplassen
Lepelaarplassen
Enkhuizen/Ven

18



5500
aantal
broedparen
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1974
1976
1978
1980
1982
1984
1986
1988
jaartal
Legenda:
trendlijn
modellijn
Naardermeer

19



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES volgens syllabus pilot

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

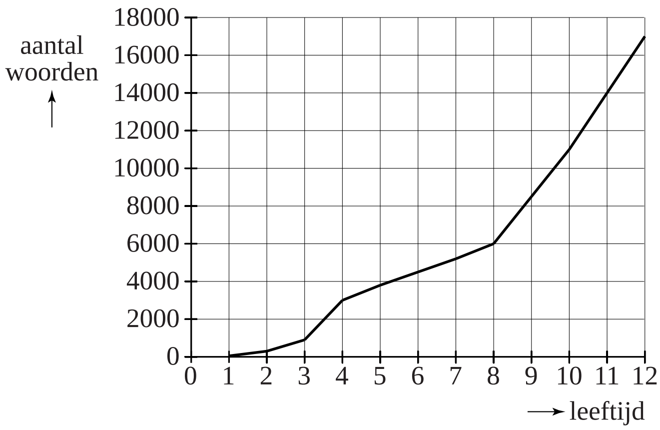
regel	voorwaarde
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Woordenschat

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken.
In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17 000 woorden.
In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur
gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland



Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

4p **1** Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17 000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45 000 tot 150 000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150 000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

3p **2** Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45 000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$W_l = at + b$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17 000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van de formule $W_l = at + b$ kan de woordenschat die jongeren met een lage woordenschat op hun 18e verjaardag hebben, berekend worden. Vervolgens kan met behulp van de formule $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$ worden berekend hoeveel maanden **eerder** jongeren met een hoge woordenschat deze zelfde woordenschat zullen hebben.

6p **3** Bereken dit aantal maanden.

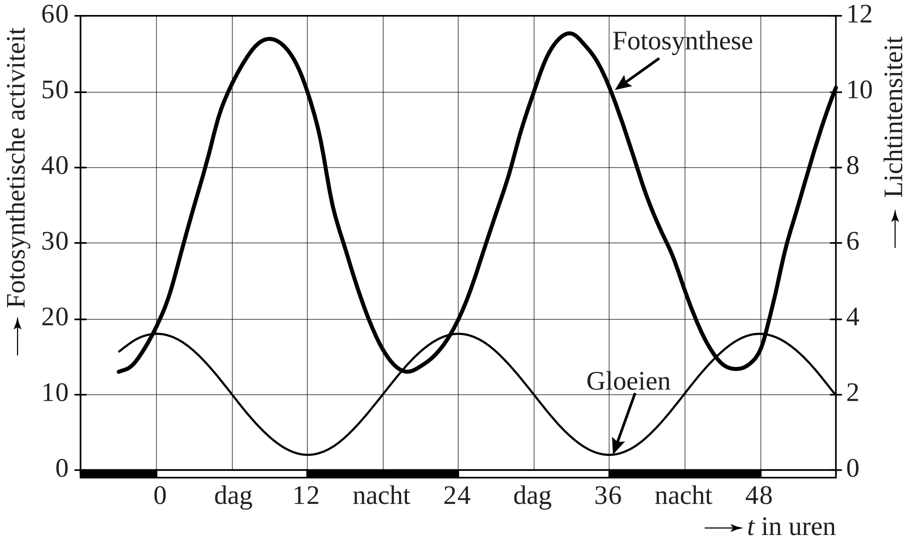
In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

3p **4** Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

Algen

Van een bepaald soort ééncellige algen (Gonyaulax polyedra) is het dag-en-nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht. In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Eén van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.

De grafiek voor de fotosynthese F als functie van de tijd, kan benaderd worden door een formule van de vorm:

$$F = a + b\sin(c(t-3))$$

Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

4p **5** Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G werd gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet.

Men kan de grafiek van het gloeien benaderen met de formule:

$$G = 2{,}0 + 1{,}6\sin\left(\tfrac{1}{12}\pi(t-18)\right)$$

Hierin is t weer de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

Tijdens iedere periode van 24 uur is de lichtintensiteit van het gloeien gedurende een bepaalde tijd groter dan 3 eenheden.

5p **6** Bereken met behulp van de formule van G hoe lang de lichtintensiteit van het gloeien in een periode van 24 uur groter is dan 3 eenheden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

De lichtintensiteit bij gloeien is na een maximum eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

4p **7** Onderzoek met behulp van een raaklijn aan de grafiek op de uitwerkbijlage met welke snelheid de lichtintensiteit maximaal afneemt bij gloeien.

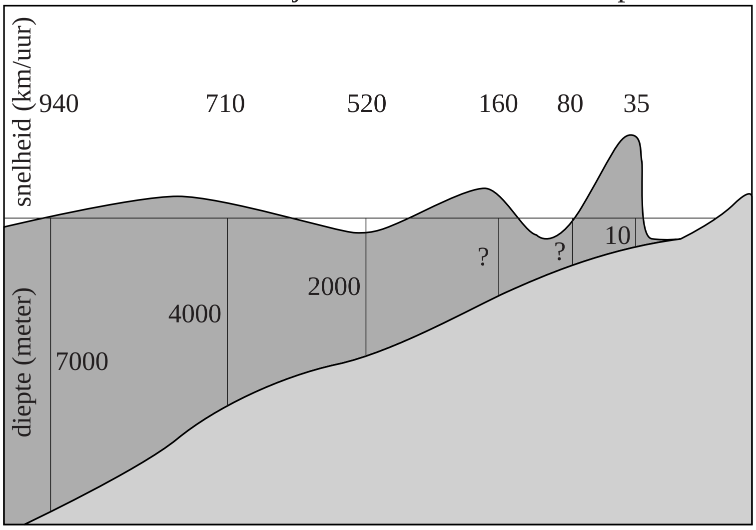
Tsunami

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.

In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.

figuur

snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten



In de figuur is bijvoorbeeld te zien dat een tsunami bij een diepte van 4000 meter zich met een snelheid van 710 km/uur verplaatst.

Voor de snelheid van een tsunami geldt bij benadering de volgende formule:

$$v = 11,3\sqrt{d}$$

Hierin is v de snelheid in km/uur en d de waterdiepte in meter.

In de figuur ontbreken twee waarden voor de waterdiepte. Zij zijn aangegeven met een vraagteken.

4p **8** Bereken met behulp van bovenstaande formule en de gegevens uit de figuur deze twee ontbrekende waarden.

De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra.
De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

3p **9** Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.

Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes:

$$h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$$

Hierin is h_1 de golfhoogte bij waterdiepte d_1 en h_2 de golfhoogte bij waterdiepte d_2; h_1, d_1, h_2 en d_2 zijn in meters.
De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km en golfhoogte 60 cm. Met deze gegevens en de formule $h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$ kunnen we voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule:

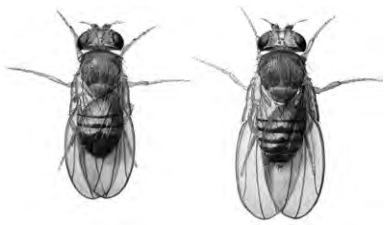
$$h = 3{,}37 \cdot d^{-0,25}$$

4p **10** Toon dit aan.

Naarmate een golf dichter bij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is in de figuur te zien. In de figuur kun je ook zien dat de golfhoogte toeneemt als de golf dichter bij de kust komt.
Met behulp van de afgeleide van h kun je onderzoeken of de **toename** van de golfhoogte groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

4p **11** Onderzoek met behulp van een schets van de afgeleide van h of deze toename groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

Fruitvliegjes



Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (Drosophila melanogaster). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.

Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken.

4p **12** Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$$F = \frac{340}{1+54\mathrm{e}^{-0{,}24t}}$$

Hierbij is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

3p **13** Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.

Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat er de meeste fruitvliegjes bijkomen wil Boris ze verdoven.

6p **14** Toon aan dat de afgeleide van F gelijk is aan $F'(t) = \dfrac{4406{,}4\mathrm{e}^{-0{,}24t}}{(1+54\mathrm{e}^{-0{,}24t})^2}$ en bereken met behulp van deze afgeleide op welke datum er de meeste fruitvliegjes bijkomen.

Een andere reden dat vaak gebruik gemaakt wordt van fruitvliegjes is dat een aantal eigenschappen goed zichtbaar zijn: oogkleur (**r**ood/**z**wart), vleugelvorm (**k**ort/**l**ang) en huidskleur (**d**onker/**g**eel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: **z-k-g**. Op basis van deze eigenschappen zijn er acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes.

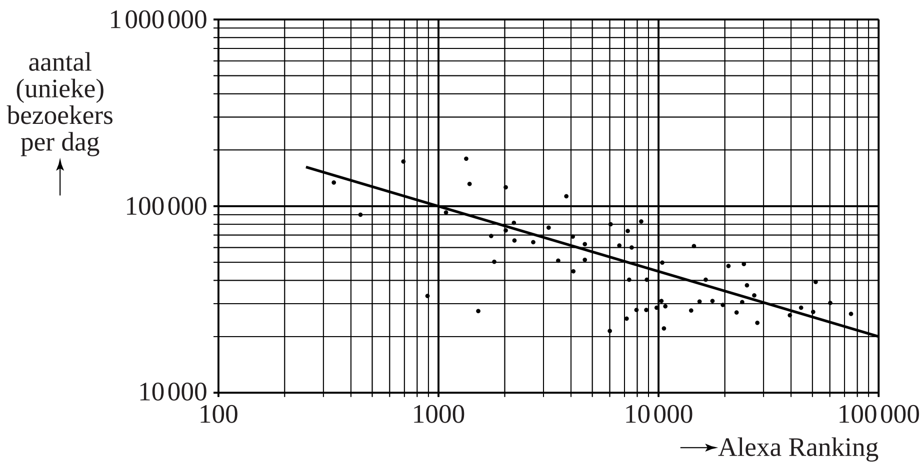
Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:
– De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
– De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

4p **15** Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

Websites

Een manier om de populariteit van websites te meten, is door naar de zogenoemde *Alexa Ranking* te kijken. Het internetbedrijf Alexa houdt bij hoe vaak websites bezocht worden, en stelt daarvan een ranglijst op. Zo heeft de website google.com wereldwijd ranking 1 met 1,2 miljard unieke bezoekers per dag (begin 2011).
Voor een aantal Nederlandse websites is het verband tussen de Alexa Ranking en het aantal unieke bezoekers per dag weergegeven in onderstaande figuur.
In de figuur is op beide assen gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur is te zien dat er verschillende websites zijn met een Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000. Het verschil tussen de bijbehorende aantallen unieke bezoekers per dag van deze websites is vrij groot.

4p **16** Bereken dit maximale verschil met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage.

De punten in de figuur liggen globaal op een rechte lijn. Deze lijn is in de figuur getekend. Bij deze lijn hoort de formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$.
Hierin is B het aantal unieke bezoekers per dag en r de Alexa Ranking van de website.

Lang niet bij alle aantallen unieke bezoekers per dag is in de figuur precies af te lezen welke Alexa Ranking de betreffende website heeft. Met de hierboven vermelde formule is deze ranking wel te berekenen.

3p **17** Bereken met behulp van de formule de Alexa Ranking van een website met 25 000 unieke bezoekers per dag.

3p **18** Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van B daalt.

De formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$ kan herschreven worden in de vorm $\log B = a + b \cdot \log r$.

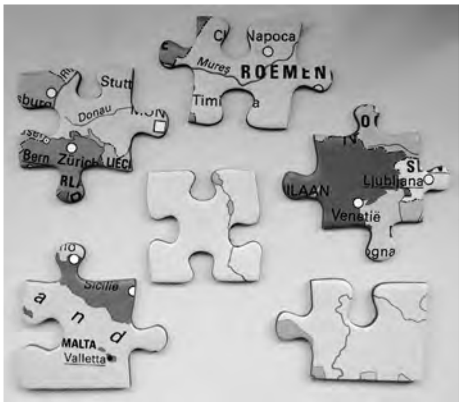
4p **19** Bereken de waarden van a en b.

Puzzelstukjes

Op de foto hiernaast zie je enkele puzzelstukjes van een legpuzzel van Europa. Als je aan een puzzel begint, kan je besluiten om de puzzelstukjes eerst op soort te selecteren: de hoekstukjes, de randstukjes en alle andere stukjes.

Deze soorten kunnen verschillende vormen hebben.
Om te onderzoeken hoeveel verschillende vormen er eigenlijk zijn, voeren we een aantal regels in:

foto



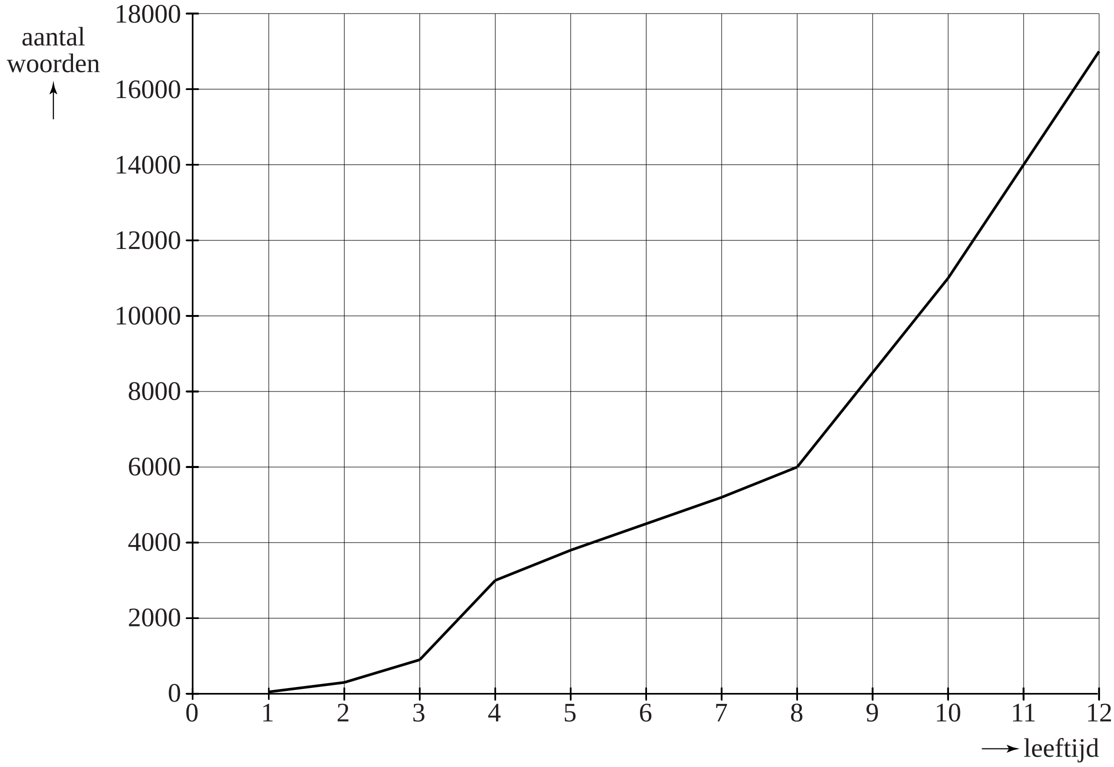
- We beschouwen de puzzelstukjes als vierkantjes;
- Een zijde kan recht zijn of met een inkeping of met een uitstulping;
- Bij een hoekstukje heb je twee aan elkaar grenzende rechte zijden (zie het stukje rechtsonder op de foto), bij een randstukje is één zijde recht (zie het stukje linksonder op de foto) en bij de overige puzzelstukjes is er geen enkele zijde recht;
- Twee stukjes hebben een gelijke vorm als ze door draaiing (over een kwart-, halve of driekwartslag) in elkaar overgaan. De twee puzzelstukjes linksboven en midden boven op de foto hebben beide twee inkepingen en twee uitstulpingen maar zijn toch verschillend van vorm;
- Stukjes die alleen door op de kop te leggen en niet door draaiing in elkaar over kunnen gaan, noemen we wel verschillend van vorm aangezien er op de achterkant niet de kaart van Europa staat.

7p **20** Bereken hoeveel verschillende vormen er in het totaal volgens bovenstaande regels zijn.

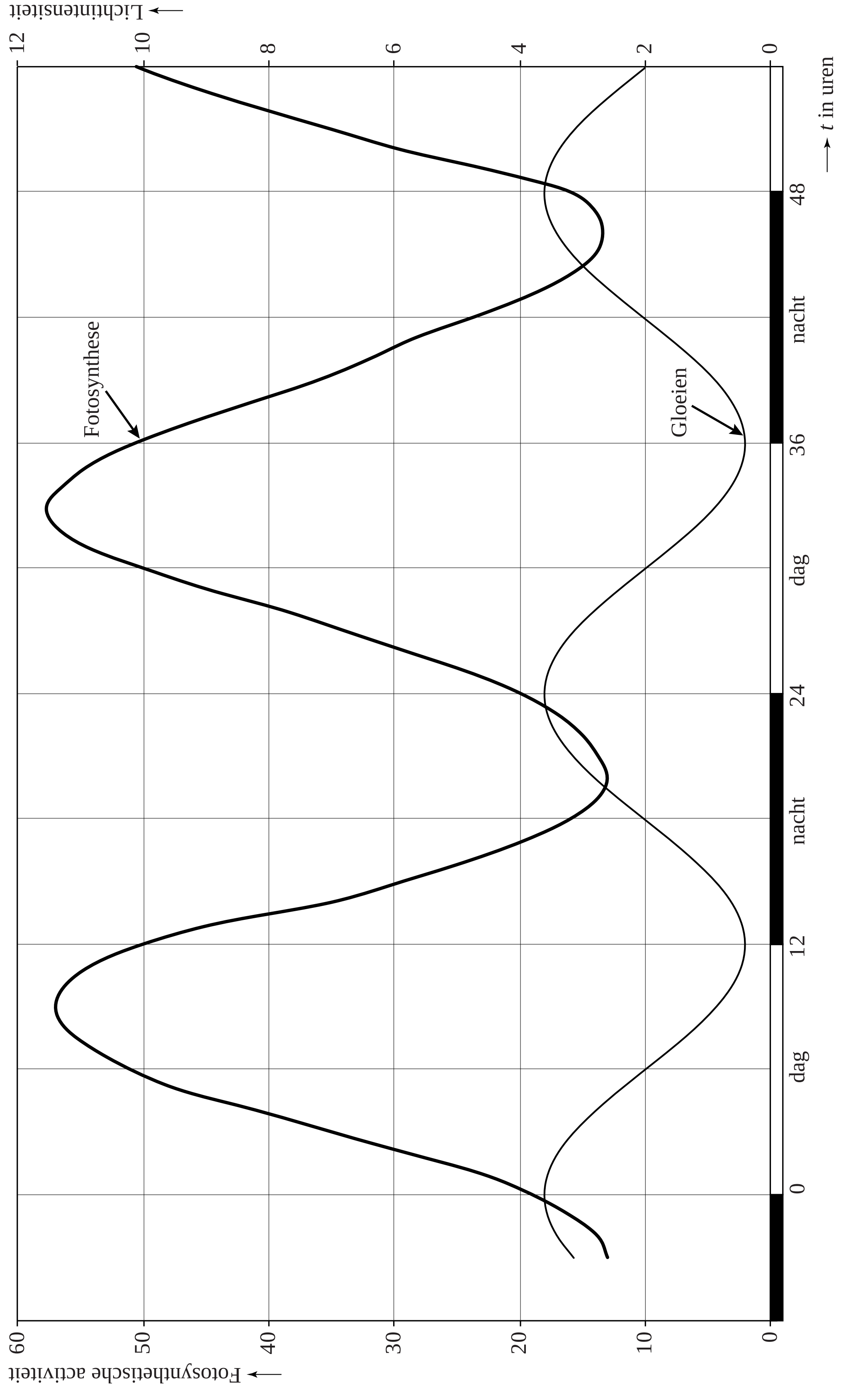
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

1

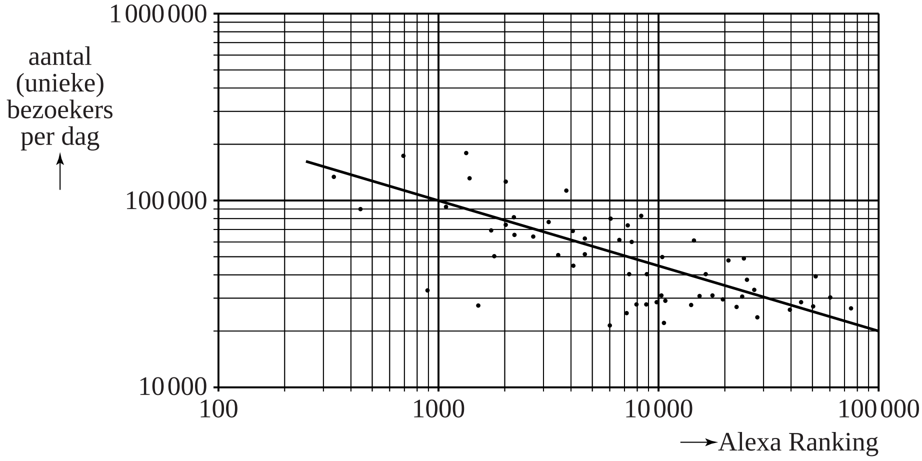


7



Lichtintensiteit
12
10
8
6
4
2
0
Fotosynthetische activiteit
60
50
40
30
20
10
0
t in uren
0
12
24
36
48
dag
nacht
Fotosynthese
Gloeien

16



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Uitwerkingen voorbeeldopgaven

a Groenbelegging

vraag 1 maximumscore 3
Op dat moment geldt: $0,0042 \cdot t + 0,072 = 0,05 \cdot 0,75 \cdot t$.
Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden.
Het antwoord: $t \approx 2,2$ dus na 2 jaar (of nauwkeuriger).

vraag 2 maximumscore 3
Een boom van 8 jaar levert (ongeveer) 0,0107 m^3 hout.
Een boom van 15 jaar levert (ongeveer) 0,0328 m^3 hout.
Het verschil is 0,022 (m^3).

vraag 3 maximumscore 4
De vergelijking $0,0042 \cdot t + 0,072 = 0,156$ moet worden opgelost.
Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden.
Hieruit volgt dat $t = 20$.
Het antwoord: (een boom is op dat moment) 15 meter.

vraag 4 maximumscore 5
$M = 0,16 \cdot D^2 \cdot L = 0,16 \cdot (0,0042 \cdot t + 0,072)^2 \cdot 0.75 \cdot t$.

$M = 0,16 \cdot (0,0042^2 \cdot t^2 + 2 \cdot 0,0042 \cdot 0,072 \cdot t + 0,072^2) \cdot 0.75 \cdot t$.

$M = 0,16 \cdot 0,0042^2 \cdot t^2 \cdot 0,75 \cdot t + 0,16 \cdot 2 \cdot 0,0042 \cdot 0,072 \cdot t \cdot 0,75 \cdot t + 0,16 \cdot 0,072^2 \cdot 0,75 \cdot t$.

$M = 0,16 \cdot 0,0042^2 \cdot 0,75 \cdot t^3 + 0,16 \cdot 2 \cdot 0,0042 \cdot 0,072 \cdot 0,75 \cdot t^2 + 0,16 \cdot 0,072^2 \cdot 0,75 \cdot t$.

Dus $a = 0,16 \cdot 0,0042^2 \cdot 0,75 \approx 2 \cdot 10^{-6}$, $b = 0,16 \cdot 2 \cdot 0,0042 \cdot 0,072 \cdot 0,75 \approx 7 \cdot 10^{-5}$ en $c = 0,16 \cdot 0,072^2 \cdot 0.75 \cdot \approx 6 \cdot 10^{-4}$.

b Al doende leert men

vraag 1 maximumscore 3
Het 5 keer verrichten van handeling A kost $5 \cdot 11,3 = 56,5$ minuten.
Het 4 keer verrichten van handeling A kost $4 \cdot 12,1 = 48,4$ minuten.
De 5e keer kost $56,5 - 48,4 = 8,1$ minuten.

vraag 2 maximumscore 3
Het invoeren van de formule voor H_n in de GR.
Het maken van een tabel met uitkomsten van H_n.
Het antwoord 0,14 (bij $n = 6$).

vraag 3 maximumscore 4
De gemiddelde handelingstijd moet steeds kleiner worden.
De waarden van H_n worden weer groter (dus de formule voldoet niet).

vraag 4 maximumscore 4

Het invoeren van de formule van T_n in de GR.
Een geschikte optie van de GR gebruiken om de som te berekenen.
Voor $n=10$ is de totale handelingstijd (ongeveer) 90,6 minuten.
De gemiddelde handelingstijd is (ongeveer) 9,1 minuten.

of

Het berekenen van T_1 tot en met T_{10}.
De som van deze handelingstijden is (ongeveer) 90,6 minuten.
De gemiddelde handelingstijd is (ongeveer) 9,1 minuten.

vraag 5 maximumscore 3

Als n heel erg groot wordt, dan wordt $0{,}68^n$ ongeveer 0.
$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$ wordt op den duur dus ongeveer 6 maar blijft daar wel altijd boven.
Die grens is dus 6.

vraag 6 maximumscore 6

T_n daalt voortdurend.
H_n, het gemiddelde van T_1 tot en met T_n, is daarmee altijd groter dan de laatste waarde (T_n) van de verschillende termen T_1 tot en met T_n.
De grafiek van H_n zal daarmee voor iedere waarde van n boven de grafiek van T_n liggen dus de eerste bewering is waar.
T_n komt steeds dichter in de buurt van een bepaald getal (namelijk 6, zie vorige vraag).
Er worden dus op den duur alleen maar (nagenoeg) dezelfde getallen aan de serie toegevoegd waarmee H_n berekend wordt.
Het gemiddelde H_n zal daarmee op den duur ook steeds meer op datzelfde getal gaan lijken dus ook bewering 2 is waar.

c Sterilisatie

vraag 1 maximumscore 4

Een punt op de lijn, bijvoorbeeld (6, 10^2).
De bijbehorende vergelijking $10^2 = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot 6}$.
Aangeven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost.
De oplossing $r \approx 2{,}2$.

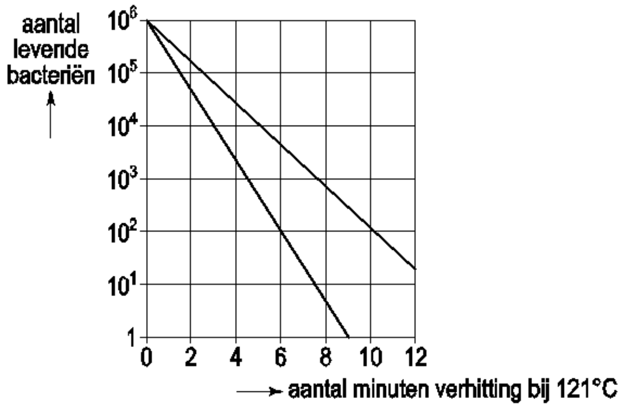
of

Een aanpak met het berekenen van bijvoorbeeld $10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot 6}$.
Dit is ongeveer gelijk aan 106.
Dit resultaat correspondeert met (ongeveer) het punt (6, 10^2).
Dit punt ligt op de lijn.

vraag 2 maximumscore 5

Het opstellen van de vergelijking $0{,}1 = 2^{-2{,}2 \cdot D}$.
Aangeven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost.
$D \approx 1{,}5$.
Controle via de grafiek:
Een reductie tot 10% is een ‘eenheid’ op de verticale as omlaag.
Op de horizontale as neemt de tijd dan toe met ongeveer 1,5.

vraag 3 maximumscore 4
Het startpunt (0, 10^6).
Een tweede punt, bijvoorbeeld (2,55; 10^5).
Een rechte lijn door de punten.



vraag 4 maximumscore 6
Voor de afgeleide geldt: $N'(t) = 10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t} \cdot \ln 2 \cdot -2,2$.
De vergelijking $10^6 \cdot 2^{-2,2 \cdot t} \cdot \ln 2 \cdot -2,2 = -10000$ moet worden opgelost.
Beschrijven hoe deze vergelijking wordt opgelost.
De oplossing: $t \approx 3,3$.
Het antwoord: na (ongeveer) 3,3 minuten.

vraag 5 maximumscore 4
Er moet gelden $2^{-r \cdot D} = 0,1$.
Dus $-r \cdot D = \dfrac{\log(0,1)}{\log(2)}$ (of $-r \cdot D = {}^2\log(0,1)$).
Dus $r \cdot D = \text{constant}$ (of $D = \dfrac{\text{constant}}{r}$) (en dus is er sprake van een omgekeerd evenredig verband).

d Verhoudingen

vraag 1 maximumscore 4
Het gegeven begin van de rij uitbreiden met 21, 34, 55, 89, … of beschrijven hoe de recurrente betrekking op de GR moet worden ingevoerd.
De eerste term die groter is dan 100 is 144 (of u_{12}).
De laatste term die kleiner is dan 500 is 377 (of u_{14}).
Dat zijn dus 3 getallen.

vraag 2 maximumscore 4

Het uitrekenen van (bijvoorbeeld) $\frac{13}{8}=1,625$; …..; . $\frac{89}{55}\approx 1,61818$;_ $\frac{144}{89}\approx 1,61798$; $\frac{233}{144}\approx 1,61806$.
Het antwoord: vanaf de termen 144 en 233 (of vanaf de 12e en 13e term).
of
Het invoeren van de rij $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, naast de betrekking voor u_{n+2} , op de GR.

$\frac{u_{12}}{u_{11}}\approx 1,61798$.

$\frac{u_{13}}{u_{12}}\approx 1,61806$.

Het antwoord: vanaf de termen 144 en 233 (of vanaf de 12e en 13e term).

vraag 3 maximumscore 3

Voor ‘De Nachtwacht’ is $v\approx 1,204$ en dus $A\approx 0,131$.
Voor ‘Oog’ is $v\approx 1,404$ en dus $A\approx 0,156$.
Het antwoord: ‘Oog’ heeft de grootste appreciatiewaarde van beide.

vraag 4 maximumscore 6

De vergelijking $\left(\frac{1}{v}-1\right)\cdot\log\left(1-\frac{1}{v}\right)=0,1544$ moet worden opgelost.
Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost.
$v\approx 1,383$ of $v\approx 1,877$.
De kortste zijde is (ongeveer) 406 cm of (ongeveer) 551 cm.
Omdat de kortste zijde meer dan 3 m korter is dan de langste zijde: de kortste zijde is (ongeveer) 406 cm.

vraag 5 maximumscore 4

Beschrijven hoe met de GR de bij het maximum van A horende waarde van v gevonden kan worden.
$v\approx 1,582$.
Het verschil is (ongeveer) 0,04.

vraag 6 maximumscore 5

$A=\left(\frac{1}{v}-1\right)\cdot\log\left(1-\frac{1}{v}\right)=\left(\frac{1}{v}-\frac{v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v}-\frac{1}{v}\right)$.

Dus $A=\left(\frac{1-v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v-1}{v}\right)$.

Dus $A=\left(\frac{1-v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)^{-1}$.

Dus $A=-1\cdot\left(\frac{1-v}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$.

Dus $A=\left(\frac{v-1}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{v-1}\right)$ (en dat komt overeen met mogelijkheid **A**).

of
Invullen van (bijvoorbeeld) $v\approx 1,204$ in ieder van de formules: formule **A** levert $A\approx 0,131$, formule **B** levert $A\approx -0,131$ en formule **C** levert $A\approx -4,550$.
Volgens de eerder gemelde formule moet voor $v\approx 1,204$ de appreciatiewaarde gelijk zijn aan 0,131.
Daarmee kan alleen mogelijkheid **A** overeenkomen met de formule van Petrov.

e Tanken

vraag 1 maximumscore 4
Een rit om te tanken is in totaal 400 km.
Daarvoor is 40 liter benzine nodig.
Dat kost $40 \cdot 2 = 80$ gulden.
Het voordeel is $150 - 80 = 70$ gulden.

vraag 2 maximumscore 5
Bij tanken in Nederland kan hij per 50 liter 500 gebruikskilometers rijden.
1 gebruikskilometer bij tanken in Nederland kost 0,50 gulden.
Bij tanken in het buitenland kan hij per 50 liter 100 gebruikskilometers rijden.
1 gebruikskilometer bij tanken in het buitenland kost 1 gulden.
Het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland is 0,50 gulden.

vraag 3 maximumscore 5
Bij tanken in Nederland kost een gebruikskilometer $\frac{N}{12{,}5}$ (of $\frac{50N}{62{,}5}$).
Bij tanken in het buitenland kan iemand per 50 liter $625-2x$ gebruikskilometers rijden.
De $625-2x$ gebruikskilometers kosten $50B$ gulden.
1 gebruikskilometer kost $\frac{50B}{625-2x}$ gulden.
Vereenvoudigen geeft $V = 0{,}08N - \frac{25B}{312{,}5-x}$.

vraag 4 maximumscore 4
Bij $x=15$ moet het voordeel 0 zijn, dus geldt $0 = 0{,}08N - \frac{25B}{297{,}5}$.
$0{,}08N = \frac{25B}{297{,}5}$.
$N \approx 1{,}05 \cdot B$.
De conclusie, bijvoorbeeld: uit N is een constante groter dan 1 maal B volgt dat de benzineprijs in Nederland een vast percentage hoger is dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland (of N is altijd 5% hoger dan B).

vraag 5 maximumscore 5
De afstand tot het dichtstbijzijnde station in het buitenland x waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken, volgt uit de vergelijking $0 = 0{,}08N - \frac{25B}{312{,}5-x}$.
$0{,}08N = \frac{25B}{312{,}5-x}$.
$x = 312{,}5 - \frac{25B}{0{,}08N}$.
$x = 312{,}5 - 312{,}5 \cdot \frac{B}{N}$.
Dus voor die afstand x geldt: $x = 312{,}5 \cdot (1 - \frac{B}{N})$.

f Golvend dak

vraag 1 maximumscore 3

$3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x)$ is maximaal 3 en minimaal –3.

h is maximaal 3 + 7 = 10 (meter).

h is minimaal –3 + 7 = 4 (meter).

vraag 2 maximumscore 4

De vergelijking die moet worden opgelost is $3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7 = 8$.

Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost.

$x \approx 3{,}4$ of $x \approx 90{,}8$.

De lengte is 87 (meter).

vraag 3 maximumscore 5

De helling is (vanwege symmetrie) het grootst 'halverwege' de minimale en de maximale hoogte, dus bij hoogte 7 m.

Beschrijven hoe de vergelijking $3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7 = 7$ kan worden opgelost.

De gezochte waarde van x: (ongeveer) 62,8 (meter).

De voorgevel van het gebouw 'begint' bij $x \approx 3{,}4$ (meter).

De maximale helling bevindt zich op (ongeveer) 62,8 – 3,4 ≈ 59 meter van de voorgevel.

g Lawaaitrauma

vraag 1 maximumscore 5

De groeifactor per 6 jaar is 2.

De groeifactor per 3 jaar is $2^{\frac{1}{2}}$.

$4500 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \approx 6400$.

vraag 2 maximumscore 3

Het tekenen van een rechte lijn door bijvoorbeeld (8, 80) en ($\frac{1}{4}$, 95).

vraag 3 maximumscore 5

In Amerika is de toegestane geluidssterkte $L = -16{,}6 \cdot \log(6) + 105 \approx 92$.

In Europa ligt dit 4 keer 3 dB boven de norm.

Dus men zou maximaal $\frac{8}{2^4} = \frac{1}{2}$ uur (of 30 minuten) mogen werken.

of

De formule van de norm voor Europa is $L = -9{,}97 \cdot \log(t) + 89$.

In Amerika is bij $t = 6$ de maximaal toegestane geluidssterkte $L \approx 92$.

Oplossen van de vergelijking $92 = -9{,}97 \cdot \log(t) + 89$ geeft $t \approx 0{,}5$, dus men mag een $\frac{1}{2}$ uur werken.

of

Aangeven van $t = 6$ op de horizontale schaal met het bijbehorende punt *P* op de grafiek.
Tekenen van punt *Q* op de grafiek van Europa met dezelfde y–coördinaat als *P.*

Aflezen geeft $t \approx 0{,}5$, dus men mag een $\frac{1}{2}$ uur werken.

h Genius

vraag 1 maximumscore 5

Het aantal tegels met twee dezelfde symbolen is $6 \cdot 5 = 30$.

Het aantal tegels met twee verschillende symbolen is $\binom{6}{2}$ of $5+4+3+2+1$.

Het aantal tegels met verschillende symbolen is $15 \cdot 6 = 90$ ….

Het antwoord: 120.

vraag 2 maximumscore 4

In elke poule worden $\frac{4 \cdot 3}{2}$ wedstrijden gespeeld.

Dat zijn $(4 \cdot 6 =)\, 24$ wedstrijden voor alle poules samen.

In de ronden daarna worden nog 4, 2 en 1 wedstrijden gespeeld.

In totaal zijn dat 31 wedstrijden.

i Keno

vraag 1 maximumscore 3

$\binom{80}{10}$ of $\frac{80 \cdot 79 \cdot \ldots \cdot 71}{10!}$.

Het antwoord ongeveer $1{,}6 \cdot 10^{12}$.

Opmerking

Als $80 \cdot 79 \cdot \ldots \cdot 71 \approx 6{,}0 \cdot 10^{18}$ als antwoord is gegeven, 1 punt voor deze vraag toekennen.

vraag 2 maximumscore 4

Het aantal mogelijkheden met 2 goede getallen is $\binom{58}{8} \cdot \binom{22}{2}$ ($\approx 4{,}4 \cdot 10^{11}$).

Het aantal mogelijkheden met 0 goede getallen is $\binom{58}{10}$ ($\approx 5{,}2 \cdot 10^{10}$).

De eerste uitkomst is ongeveer 8,5 keer zo groot als de tweede uitkomst, dus Fred heeft geen gelijk.

j Sauna

vraag 1 maximumscore 4

$200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100$.

Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden.

De oplossing $t \approx 2{,}027$.

Het tijdstip 17:02 uur.

vraag 2 maximumscore 4

De grafiek van S stijgt weliswaar maar dat proces gaat steeds langzamer.

Daardoor blijven alleen diagram C en diagram D over.

Omdat (zie vraag 1) de temperatuur blijft stijgen tot even na tijdstip $t = 2$, is er in de periode tussen 2 en 2,5 uur nog een kleine toename van de temperatuur.

Alleen diagram C blijft dan over.

vraag 3 maximumscore 4

$S' = -180 \cdot -0,29 \cdot e^{-0,29t}$.

Een uitleg (door het maken van een schets of het geven van een redenering gebaseerd op de formule van S') dat de grafiek van S' voortdurend positief is dus S stijgend is.

Het inzicht dat S' steeds kleiner wordt (maar wel positief blijft) dus S afnemend stijgend is (dus de conclusie is juist).

vraag 4 maximumscore 3

$S'(1) \approx 39,1$.

Die 39,1 betekent: als de temperatuur een uur lang met dezelfde snelheid blijft stijgen als hij stijgt op het tijdstip $t = 1$, dan is de temperatuur 39,1 °C gestegen.

vraag 5 maximumscore 4

Uit $S = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$ volgt $180 \cdot e^{-0,29t} = 200 - S$.

$e^{-0,29t} = \dfrac{200 - S}{180}$.

$-0,29t = \ln \dfrac{200 - S}{180}$.

$t = \dfrac{\ln \dfrac{200 - S}{180}}{-0,29}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking).

k Lengte van jongetjes

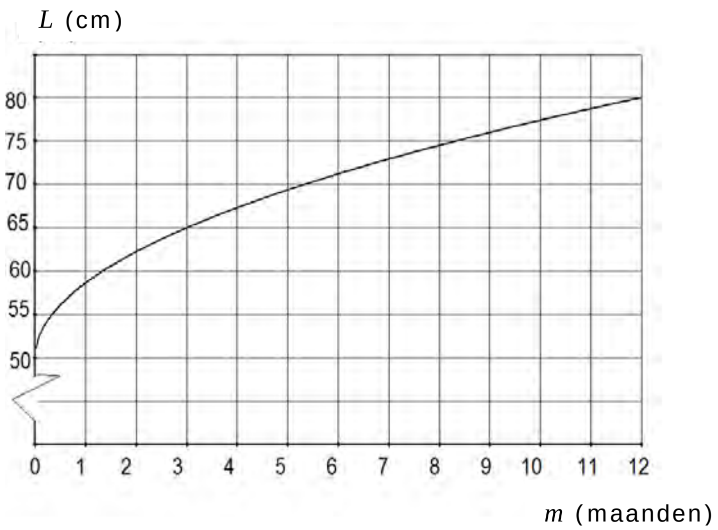
vraag 1

Als j = 0 geldt L = 50, dus p = 50

Als j = 9 geldt L = 140, dus $140 = 50 + q\sqrt{9}$

Dit geeft q = 30

vraag 2



vraag 3

De formule heeft de vorm $L = a + b\sqrt{m}$
Als m = 0 geldt L = 50, dus a = 50
Als m = 12 geldt L =80, dus $80 = 50 + b\sqrt{12}$
Dit geeft b **=** 8,7 (of nauwkeuriger)
Het antwoord: $L = 50 + 8{,}7\sqrt{m}$ (of een nauwkeurigere waarde voor b)

of

Er geldt $L = 50 + 30\sqrt{j}$ en $j = \dfrac{m}{12}$

Dit geeft $L = 50 + 30\sqrt{\dfrac{m}{12}}$

Hieruit volgt $L = 50 + \dfrac{30 \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{12}}$

Het antwoord: $L = 50 + \dfrac{30}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{m}$ (of $L = 50 + 8{,}7\sqrt{m}$ (of nauwkeuriger))

Vraag		Scores

uitwerkingen voorbeeldexamenopgaven

A Onnodig ingewikkeld?

1 maximumscore 4

- Uitgerekend moet worden het tijdstip t waarbij $S = \frac{168,0}{170,0}$ $(\approx 0,9882)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{168,0}{170,0} = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ opgelost kan worden 1
- De oplossing van de vergelijking: $t \approx 14,73$ uur 1
- Het antwoord: na 884 minuten (ofwel 14 uur en 44 min.) (of nauwkeuriger) 1

2 maximumscore 6

- $S' = \frac{-0,00216}{-0,00216t + 2,7183}$ $\left(= \frac{0,00216}{0,00216t - 2,7183}\right)$ 2
- Met, bijvoorbeeld, een grafiek van S' duidelijk maken dat S' voor alle waarden van t negatief is 1
- Hieruit volgt dat S dalend is 1
- Aan de hand van (de grafiek van) S' valt in te zien dat S' voor toenemende t steeds kleiner wordt 1
- Het steeds kleiner worden van S' betekent vervolgens dat S toenemend daalt 1

3 maximumscore 4

- Beschrijven hoe het maximum van V met de GR gevonden kan worden 1
- Dit maximum is $2,9551 \cdot 10^{-5}$ 2
- Het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen is dus $170 \cdot 2,9551 \cdot 10^{-5} \approx 0,0050$ cm (of 0,005 cm) (of nauwkeuriger) 1

Vraag		Scores

B Bezonning

1 maximumscore 4

- Op 30 januari geldt: n = 30 — 1
- Als n = 30 dan geldt $B \approx 8,832$ — 1
- De bezonning is dan 8 uur en 50 minuten — 1
- Het antwoord: 17:17u — 1

2 maximumscore 4

- Op 13 april geldt: n = 103 — 1
- $B(103) > 14,07$ — 2
- $B(102) < 13,9994$ — 1

of

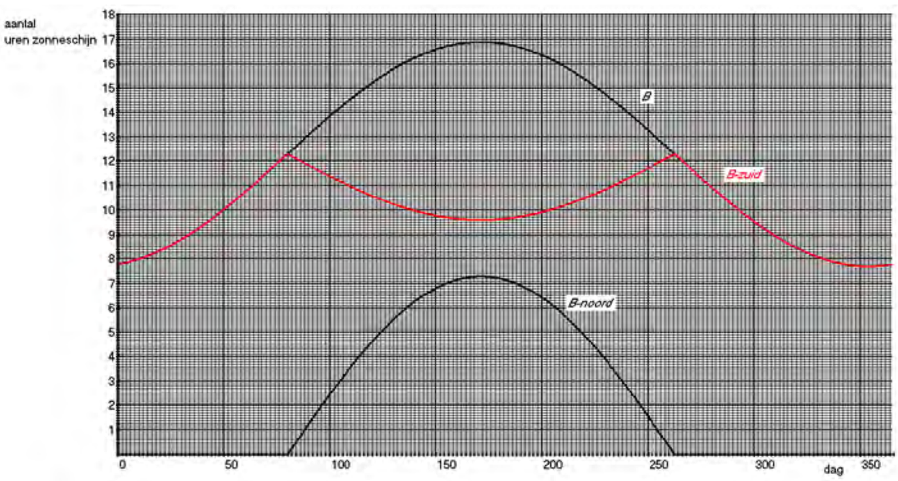
- De vergelijking $12,3+4,6\cdot\sin(0,0172\cdot(n-80))=14$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- De oplossing $n \approx 102,008$ (of nauwkeuriger) — 1
- De conclusie — 1

3 maximumscore 3

- Het maximum van B is, volgens de formule, $12,3+4,6$ — 1
- Het minimum van B is, volgens de formule, $12,3-4,6$ — 1
- Het verschil in bezonning is daarmee 9,2 uur en dat is 9 uur en 12 minuten — 1

4 maximumscore 4

- Het gebruik maken van *B-zuid* + *B-noord*= *B* — 1
- De tekening (zie onderstaand voorbeeld) — 3



Opmerking
Als de grafiek van B-zuid geen knikken vertoont, ten hoogste 3 punten toekennen voor vraag 4

Vraag		Scores

C Economische cycli

1 maximumscore 4

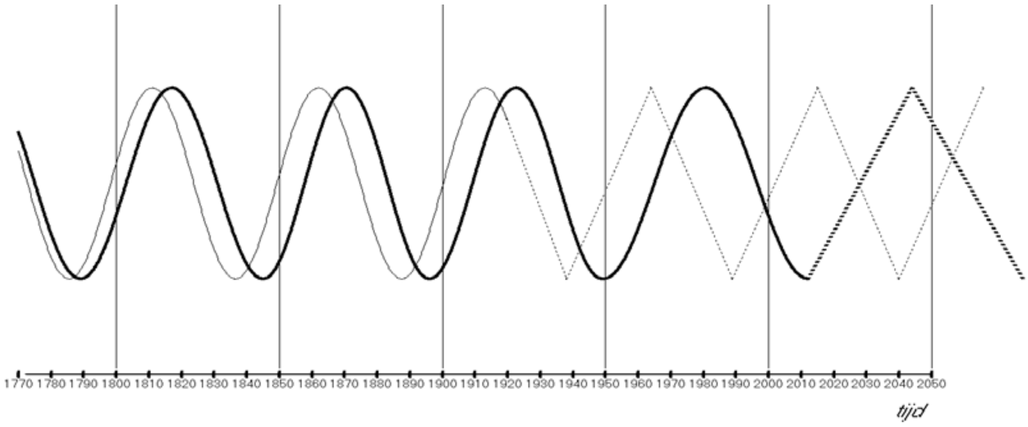
- Aflezen uit de figuur: de periode is ongeveer 51 jaar 1
- In $1913+2\times51=2015$ is er een maximum 1
- In 1989 (of 1990) is er een minimum 1
- Het crisisjaar 2009 ligt vlak voor de top, (dus ligt 2009 niet in een periode van economische neergang) 1

Opmerking
Voor de aflezingen mag bij deze en de volgende vraag een marge van 1 jaar gehanteerd worden.

2 maximumscore 4

- Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Barker maxima voor $t\approx1981$ en $t\approx2044$ en een minimum voor $t\approx2012$ 1
- Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Kondratieff maxima voor $t\approx1964$ en $t\approx2015$ en minima voor $t\approx1989$ en $t\approx2040$ 1
- Een (rudimentaire) schets van beide grafieken (zie hieronder) of een toelichting 1
- Het antwoord: in de perioden 1964 tot 1981; 1989 tot 2012; 2015 tot 2040 en 2044 tot 2050 1

Voorbeeld van een schets



3 maximumscore 4

- Een periode van 51 jaar geeft $c=\frac{2\pi}{51}$ 1
- Een beginwaarde is bijvoorbeeld $1913+0,75\times51\approx1951$ 1
- Een juiste formule, bijvoorbeeld $K=\sin(\frac{2\pi}{51}(t-1951))$ 2

4 maximumscore 4

- De twee volgende perioden duren 20 resp. 13,3 jaar 1
- 2040 valt in de periode van 2035 tot 2048 1
- Het verdelen van deze periode in vier delen 1
- Het antwoord: 2040 valt in de “zomer” 1

Vraag		Scores

5 maximumscore 6

- De lengten van de perioden vormen een meetkundige rij met factor $\frac{2}{3}$ 1
- Een aanpak als: een tabel maken bij de formule $P = 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 1
- De 9e periode na 2015 is de eerste periode die korter is dan één jaar 1
- Aangeven dat de som van de eerste acht perioden na 2015 berekend moet worden 1
- Die som is 57,7 jaar (of nauwkeuriger) 1
- $2015 + 57,7 \approx 2072,7$, dus in het jaar 2072 (begint de 1e periode korter dan een jaar) 1

Vraag		Scores

D Wereldbevolking

1 maximumscore 4

- De formule geeft 1621 en 3098 1
- De relatieve afwijkingen zijn 28% en 23% (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 1850 1

2 maximumscore 3

- Beschrijven hoe de vergelijking $N = 20\,000$ opgelost kan worden 2
- Het antwoord: 2238 (of 2237) 1

3 maximumscore 4

- De groeifactor per jaar is de oplossing van de vergelijking $g^{50} = \frac{2516}{1656}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- $g = 1,008400$ (of nauwkeuriger) 1
- Het antwoord: 0,8400% 1

4 maximumscore 4

- Het opstellen van een formule, bijvoorbeeld $N = 795 \cdot 1,004656^{t-1750}$, voor de wereldbevolking N in deze periode 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $N = 1000$ opgelost kan worden 1
- Het antwoord: 1800 (of 1799) 1

5 maximumscore 4

- Het aantal geboortes per jaar is $0,023 \cdot 5760 \cdot 1,01092^t$ 1
- Beschrijven hoe $\sum_{t=0}^{t=7} 0,023 \cdot 5760 \cdot 1,01092^t$ berekend kan worden 2
- Het antwoord: 1101 miljoen 1

Vraag		Scores

E Koolstofdatering

1 maximumscore 3

• $100 \cdot g^{5730} = 50$	1
• Beschrijven hoe bovenstaande vergelijking wordt opgelost	1
• Het antwoord: 0,999879	1

2 maximumscore 2

• $Q = 100 \cdot 0{,}99988^{60000}$	1
• Het antwoord: 0,07(%)	1

3 maximumscore 4

• Uit $Q = 100 \cdot 0{,}99988^t$ volgt: $0{,}99988^t = \dfrac{Q}{100}$	1
• $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{Q}{100}\right)}{\ln(0{,}99988)}$	1
• $t = \dfrac{\ln(Q) - \ln(100)}{\ln(0{,}99988)}$	1
• Dit is, bij benadering, gelijk aan $t = \dfrac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$	1

4 maximumscore 4

• $Q = 73{,}19$ geeft $t = \dfrac{\ln(73{,}19) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$	1
• $t \approx 2600$ (jaar BP) (of nauwkeuriger)	1
• In de figuur aflezen dat bij een berekende ouderdom van 2600 BP een werkelijke ouderdom van (ongeveer) 2750 BP hoort	1
• $2750 - 1950 = 800$ dus 800 voor Chr. (of nauwkeuriger)	1

5 maximumscore 4

• $20550 - 19925 = 625$ (jaar) en $22650 - 21925 = 725$ (jaar)	1
• De ouderdom is $21925 + \dfrac{175}{625} \cdot 725$ (jaar voor Chr.)	2
• $21925 + 203 = 22128$ dus 22130 voor Chr.	1

Vraag		Scores

F Verkeersdrempels

1 maximumscore 3

- De periode (of het verschil tussen twee nulpunten) moet bepaald worden 1
- De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi}$ 1
- Het antwoord: 4 (meter) 1

2 maximumscore 4

- De vergelijking $0{,}06+0{,}06\sin\left(\frac{1}{2}\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=0{,}1$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden 1
- De oplossingen 1,465 en 2,535 (of nauwkeuriger) 1
- Het antwoord 1,07 meter (of 107 cm) 1

3 maximumscore 4

- Bij een sinusoïde treedt maximale helling op bij het passeren van de evenwichtsstand 2
- Dit is voor het eerst het geval voor $x=1$ 1
- Het antwoord: 1 (meter van het begin) 1

4 maximumscore 3

- $a=b=0{,}07$ (of nauwkeuriger) 1
- $c=\frac{2\pi}{12}$ (of nauwkeuriger) 1
- $d=\frac{12}{4}=3$ (of nauwkeuriger) 1

Vraag		Scores

G Berlijnse klok

1 maximumscore 4

• Elke 5 minuten gaat de lamp 1 keer aan	1
• Dat is 12 keer per uur	1
• Na 13 uur dus 156 keer	1
• Om 13:48u dus $156 + 9 = 165$ keer (de lamp brandt nu niet)	1

2 maximumscore 4

• Op 2 verschillende rijen telkens 1 lamp: $\binom{5}{2} = 10$	2
• Op 1 rij 2 lampen: 4 mogelijkheden	1
• In totaal zijn er dus 14 mogelijkheden	1

3 maximumscore 5

• 12 uur = 720 'minuut'-tijdstippen	1
• De 4e rij geeft 5 mogelijkheden, de 3e rij 4, de 2^e rij 3 en de 1^e rij 2	1
• In combinatie met de 5e rij zijn dat 6! mogelijke 'minuut'-tijdstippen	2
• En 6! = 720	1

Vraag		Scores

H Sluipwespen

1 maximumscore 3

- Het aantal larven met eitjes afgelezen uit de grafiek is 47 (of een andere gehele waarde in het interval $\left[45, 50\right]$) 1
- Het aantal volgens de formule is $64 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0,01 \cdot 100}) \approx 40,46$ 1
- Het verschil is $47 - 40 = 7$ larven 1

2 maximumscore 4

- $E' = 64 \cdot -\mathrm{e}^{-0,01L} \cdot -0,01$ 1
- Dit herleiden tot $E' = 0,64 \cdot \mathrm{e}^{-0,01L}$ 1
- E' is altijd positief dus de grafiek van E is stijgend 1
- E' neemt af voor toenemende L dus de grafiek van E is afnemend stijgend, dus het aantal larven met eitjes E neemt steeds minder snel toe als het totale aantal larven L toeneemt 1

of

- $E' = 64 \cdot -\mathrm{e}^{-0,01L} \cdot -0,01$ 1
- Een schets van de grafiek van E' 1
- E' is altijd positief dus de grafiek van E is stijgend 1
- E' neemt af voor toenemende L dus de grafiek van E is afnemend stijgend, dus het aantal larven met eitjes E neemt steeds minder snel toe als het totale aantal larven L toeneemt 1

3 maximumscore 3

- Voor grote waarden van L geldt $\mathrm{e}^{-0,01} \approx 0$ 2
- De grenswaarde van E is $64 \cdot (1 - 0) = 64$ 1

of

- Het berekenen van de waarde van E bij een grote waarde van L 2
- De grenswaarde van E is 64 1

Vraag		Scores

I Groenbelegging

1 maximumscore 7

- Een boom van 8 jaar levert ongeveer $0{,}16 \cdot 0{,}108^2 \cdot 7 \approx 0{,}0131$ m³ hout en voor een boom van 15 en 20 jaar is dit 0,0324 resp. 0,0635 m³ 1
- De houtopbrengst na 8 jaar is $0{,}0131 \cdot 200 \cdot 600 \approx 1572$ euro; na 15 jaar is dit $0{,}0324 \cdot 300 \cdot 600 \approx 5832$ euro en na 20 jaar is $0{,}0635 \cdot 460 \cdot 600 \approx 17526$ euro 1
- De totale houtopbrengst is naar verwachting ten minste gelijk aan 24900 euro(of nauwkeuriger) 1
- De spaarrekening levert $5000 \cdot 1{,}08^{20} \approx 23300$ euro op (of nauwkeuriger), dus de bewering klopt 1
- $5000 \cdot g^{20} = 24900$ 1
- $g \approx 1{,}084$ (of nauwkeuriger) 1
- Een spaarrekening met een rente van 8,4% zou minstens even veel opbrengen 1

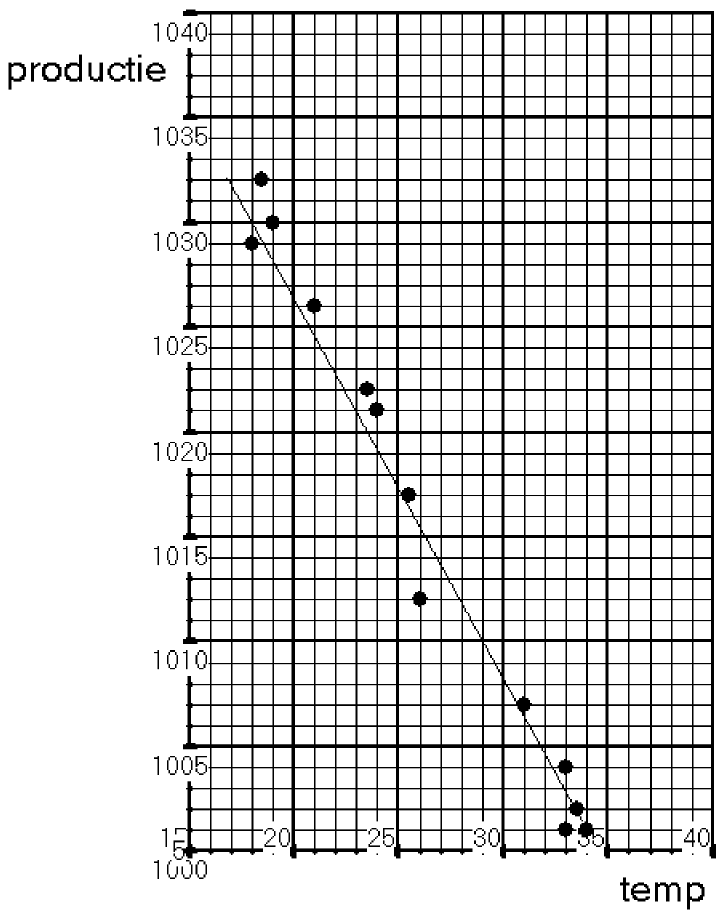
J Productie en temperatuur

1 maximumscore 8

- Maximumtemperatuur en ‘bijbehorende’ productie via een tabel aan elkaar koppelen: 4

max.temp	productie		max.temp	productie		max.temp	productie
			31	1007		26	1012
18,5	1032		33	1004		25,5	1017
19	1030		33,5	1002		24	1021
21	1026		34	1001		21	1026
23,5	1022		33	1001		18	1029

- Temperatuur en productiegegevens in een grafiek plaatsen 1
- Het tekenen van een lijn die het verband benadert 1



- Opstellen van een vergelijking, bijvoorbeeld $P = -1{,}7 \cdot T + 1060$ 2

Vraag		Scores

K Quadominos

1 maximumscore 8

•	Er zijn zes stenen met vier dezelfde cijfers	1
•	Het aantal stenen met precies drie dezelfde cijfers erop is $6 \cdot 5$	1
•	Het aantal stenen met twee keer twee dezelfde cijfers erop is $\frac{6 \cdot 5}{2}$	1
•	Het aantal stenen met twee dezelfde cijfers en daarnaast twee verschillende cijfers erop is $6 \cdot \binom{5}{2}$	2
•	Het aantal mogelijke stenen met vier verschillende cijfers erop is $\binom{6}{4}$	1
•	Het werkelijke aantal stenen met vier verschillende cijfers erop is $\binom{6}{4} - 1$	1
•	In totaal zijn er $6 + 30 + 15 + 60 + 14 = 125$ stenen	1

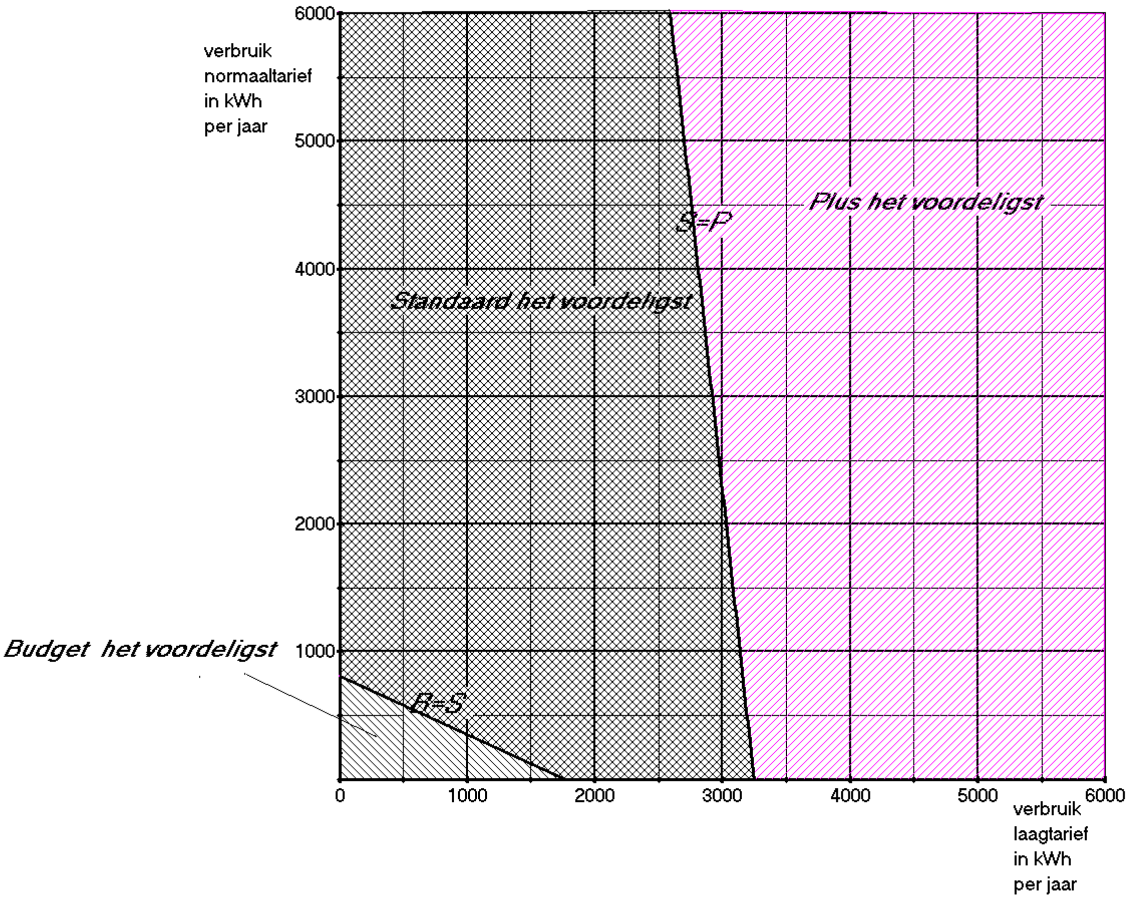
Vraag		Scores

L Elektriciteit

1 maximumscore 7

- Het opstellen van een formule die hoort bij een laagtariefverbruik l en een normaaltariefverbruik n,, uitgaande van keuzetarief Standaard: $S = 17,85 + 0,0419 \cdot l + 0,0749 \cdot n$ 2
- De overeenkomstige formule, uitgaande van keuzetarief Plus: $P = 35,70 + 0,0364 \cdot l + 0,0743 \cdot n$ 1
- Uit $S = P$ volgt de vergelijking $0,0055 \cdot l + 0,0006 \cdot n = 17,85$ 1
- Het tekenen van de grafiek van de lijn $S = P$ in het assenstelsel 1
- De verschillende vlakdelen waarin het gebied verdeeld wordt door de grafieken, voorzien van de juiste aanduidingen Budget, Standaard en Plus (zie onderstaande figuur) 2

Voorbeeld figuur



Correctievoorschrift VWO

2012

tijdvak 1

wiskunde A (pilot)

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Inzenden scores

1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.
Voorts heeft het College voor Examens (CvE) op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet CvE de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
2 De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommitteerde toekomen.
3 De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.

4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.

5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommitteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommitteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Examens van toepassing:

1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.

2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.

3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
   - 3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
   - 3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
   - 3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
   - 3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
   - 3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
   - 3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;
   - 3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.
Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.
Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht.
Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 81 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt afgetrokken tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Schroefas

1 maximumscore 3

Een aanpak als:
- Het tekenen van de lijn op de uitwerkbijlage 1
- Aflezen op de middelste schaal: (iets minder dan) 25 mm (of 24 mm) 1
- De diameter is dus groot genoeg 1

2 maximumscore 3
- Een groter vermogen betekent lager op de rechteras 1
- De lijn door dit punt en 45 mm van de middelste schaal komt dan hoger op de linkeras uit 1
- Bij dat linkerpunt hoort een grotere waarde van het toerental 1

Opmerking
Als slechts een of meer getallenvoorbeelden gegeven worden zonder verdere toelichting, ten hoogste 1 scorepunt aan deze vraag toekennen.

3 maximumscore 4
- Het aflezen van de waarden $D = 60$ en $P = 400$ 1
- $60 = 79,78 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{R}}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 940 (tpm) (of nauwkeuriger) 1

4 maximumscore 4

- $30 = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{P}{R}}$ — 1
- $0{,}376 = \sqrt[3]{\dfrac{P}{R}}$ — 1
- $\dfrac{P}{R} = 0{,}053$ — 1
- $P = 0{,}053R$ — 1

Opmerkingen

– *Als* $P = \left(\dfrac{30}{79{,}78}\right)^3 \cdot R$ *als eindantwoord gegeven wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

– *Als door tussentijds forser afronden P = 0,055R als eindantwoord gegeven wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

– *In plaats van de waarde 0,053 in het eindantwoord mag (natuurlijk) ook een nauwkeuriger waarde vermeld worden.*

Hooikoorts

5 maximumscore 6

- $C'_1 = \dfrac{(190t^2+60)\cdot 16 - 16t\cdot 380t}{(190t^2+60)^2}$ $\left(= \dfrac{960-3040t^2}{(190t^2+60)^2}\right)$ — 2
- Opgelost moet worden de vergelijking $C'_1(t) = 0$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- De oplossing $t \approx 0{,}56$ (of nauwkeuriger) — 1
- Het antwoord: 34 minuten — 1

Opmerking
Als de afgeleide van C_1 *niet is opgesteld, geen scorepunten aan deze vraag toekennen.*

6 **maximumscore 6**

- Bij formule C_1 geldt: de teller is lineair en de noemer is kwadratisch (en voor $t > 0$ zijn beide positief) 1
- De noemer wordt sneller groot dan de teller 1
- C_1 nadert op den duur de waarde 0 (dus de werkzame stof is na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen) 1
- Bij formule C_2 geldt: beide e-machten hebben een negatieve exponent 1
- Beide e-machten naderen op den duur de waarde 0 1
- Het verschil van beide e-machten dus ook C_2 nadert op den duur de waarde 0 (dus de werkzame stof is na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen) 1

7 **maximumscore 6**

- $C'_2(t) = 0{,}13\left(-0{,}65\mathrm{e}^{-0{,}65t} + 3{,}9\mathrm{e}^{-3{,}9t}\right)$ 2
- De vergelijking $0{,}13\left(-0{,}65\mathrm{e}^{-0{,}65t} + 3{,}9\mathrm{e}^{-3{,}9t}\right) = 0$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- De oplossing $t \approx 0{,}55$ (of nauwkeuriger) 1
- Het maximum van C_2 wordt dus eerder dan het maximum van C_1 bereikt 1

of

- $C'_2(t) = 0{,}13\left(-0{,}65\mathrm{e}^{-0{,}65t} + 3{,}9\mathrm{e}^{-3{,}9t}\right)$ 2
- $C'_2(0{,}56) = 0{,}13\left(-0{,}65\mathrm{e}^{-0{,}364} + 3{,}9\mathrm{e}^{-2{,}184}\right)$ 1
- Constateren dat $C'_2(0{,}56) \approx -0{,}002$ 1
- Omdat $-0{,}002 < 0$ is $C_2(t)$ voor $t = 0{,}56$ dalend 1
- Het maximum van C_2 wordt dus eerder dan het maximum van C_1 bereikt 1

Opmerkingen

– *Als bij deze vraag met behulp van de GR het maximum van C_1 bepaald is (of de t-coördinaat van het maximum), hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

– *Als een leerling zich bij deze vraag baseert op een bij de vorige vraag verkeerd berekende t-waarde, hiervoor bij deze vraag geen scorepunten in mindering brengen.*

– *Als de factor 0,13 in de afgeleide functie zonder toelichting is weggelaten, ten hoogste 5 scorepunten aan deze vraag toekennen.*

Waardepunten

8 **maximumscore 4**

- 6 maal kop en schotel voor $6 \cdot 600 = 3600$ (punten) 1
- 8 theelepeltjes voor $8 \cdot 450 = 3600$ (punten) 1
- 3 maal kop en schotel en 4 theelepeltjes voor $1800 + 1800 = 3600$ (punten) 1
- 3 theeglazen, 2 theelepeltjes en 1 kop en schotel voor $2100 + 900 + 600 = 3600$ (punten) 1

9 **maximumscore 4**

- Je moet elk artikel met ten minste 100 waardepunten betalen 1
- De eerste 700 punten zijn € 10,50 waard 1
- 11 300 punten zijn € 56,50 waard 1
- Marieke moet (€ 102,30 – € 67,- =) € 35,30 bijbetalen 1

Opmerking
Als een kandidaat niet elk artikel met waardepunten betaalt, daarvoor 1 scorepunt in mindering brengen.

10 **maximumscore 4**

- Het berekenen van $\frac{2{,}14}{1{,}50}$, $\frac{3{,}06}{2{,}14}$ en $\frac{4{,}37}{3{,}06}$ 1
- Het berekenen van $\left(\frac{8{,}90}{4{,}37}\right)^{0{,}5}$, $\left(\frac{18{,}15}{8{,}90}\right)^{0{,}5}$ en $\left(\frac{37{,}01}{18{,}15}\right)^{0{,}5}$ 1
- De zes (groei)factoren zijn (ongeveer) aan elkaar gelijk dus er is (bij benadering) sprake van exponentiële groei 1
- De groeifactor per 1000 punten is 1,427 of 1,428 1

of

- Het berekenen van, bijvoorbeeld, $\frac{2{,}14}{1{,}50} \approx 1{,}427$ 1
- Door berekening nagaan dat, uitgaande van de factor 1,427, alle andere waarden in de tabel (bij benadering) passen in een exponentieel verband 2
- De groeifactor per 1000 punten is 1,427 1

Opmerking
Als een kandidaat, bij bovenstaande tweede methode, een ander tweetal tabelwaarden heeft gebruikt om een groeifactor per 1000 punten te bepalen, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Behendigheid

11 maximumscore 3

- TE en LE zijn beide nooit negatief dus $LE+TE$ is nooit negatief dus $B=\dfrac{LE}{LE+TE}$ is ook nooit negatief (bewering 1) — 1
- Omdat TE niet negatief is, geldt: $LE \le LE+TE$ dus $B=\dfrac{LE}{LE+TE}\le 1$ (bewering 2) — 1
- Als het toevalseffect kleiner is, is TE kleiner dus $LE+TE$ kleiner dus $B=\dfrac{LE}{LE+TE}$ groter (bewering 3) — 1

Opmerking
Als slechts met getallenvoorbeelden gewerkt is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

12 maximumscore 3

- $B=\dfrac{LE}{LE+TE}=\dfrac{LE+TE-TE}{LE+TE}$ — 1
- $B=\dfrac{LE+TE-TE}{LE+TE}=\dfrac{LE+TE}{LE+TE}-\dfrac{TE}{LE+TE}$ — 1
- $B=1-\dfrac{TE}{LE+TE}$ — 1

of

- $B=1-\dfrac{TE}{LE+TE}=\dfrac{LE+TE}{LE+TE}-\dfrac{TE}{LE+TE}$ — 1
- $B=\dfrac{LE+TE-TE}{LE+TE}$ — 1
- $B=\dfrac{LE+TE-TE}{LE+TE}=\dfrac{LE}{LE+TE}$ — 1

13 maximumscore 3

- Als TE gelijk blijft en LE stijgt, wordt $LE + TE$ groter — 1
- Dan wordt $\dfrac{TE}{LE+TE}$ kleiner — 1
- Dan wordt $B=1-\dfrac{TE}{LE+TE}$ dus groter — 1

14 maximumscore 3

- Het verschil tussen de fictieve speler en de ervaren speler zit in de extra informatie die de fictieve speler wel en de ervaren speler niet heeft — 1
- Als het toeval bij een spel een grotere rol speelt, zal die extra informatie voor de fictieve speler veel extra winst opleveren — 1
- Dan is het verschil in winst tussen beide spelers (*TE* dus) groter — 1

15 maximumscore 3

- Totaal beginner = −30, totaal ervaren speler = 80 en totaal fictieve speler = 390 — 1
- Het behendigheidsniveau op basis van de totalen: $B \approx 0,26$ (of nauwkeuriger) — 1
- Het pokerspel ‘Texas Hold’Em’ is geen kansspel (omdat $0,26 > 0,2$) — 1

Aalscholvers

16 maximumscore 4

- De gemiddelde toename per jaar voor de Oostvaardersplassen is $\frac{8400-0}{1992-1978} = 600$ en de gemiddelde toename per jaar voor de Lepelaarplassen is $\frac{5400-0}{1993-1985} \approx 675$ (of nauwkeuriger) — 1
- De gemiddelde toename per jaar voor de Oostvaardersplassen is inderdaad kleiner — 1
- Een lijn trekken in de grafiek door de punten (1978, 0) en (1992, 8400) (voor de Oostvaardersplassen) en een lijn door (1985, 0) en (1993, 5400) (voor de Lepelaarplassen) — 1
- De lijn voor de Oostvaardersplassen is minder steil dan die voor de Lepelaarplassen dus de gemiddelde toename per jaar is kleiner voor de Oostvaardersplassen — 1

Opmerking
Voor elk van de af te lezen aantallen broedparen is de toegestane marge 100.

17 maximumscore 4

- De evenwichtsstand is (ongeveer) $\frac{1}{2}(5500+4500)=5000$ — 1
- De amplitude is (ongeveer) $\frac{1}{2}(5500-4500)=500$ — 1
- Van de waarde bij 1995 tot de waarde bij 2001 zijn (ongeveer) twee perioden, dus de periode is 3 jaar — 1
- Een formule is $N = 5000 + 500\sin(\frac{2\pi}{3}t)$ of $N = 5000 + 500\sin(2,1t)$ — 1

18 **maximumscore 6**

- Het aflezen van het startgetal van de trendlijn: $p = 3000$ 1
- Het aflezen van twee punten op de trendlijn, bijvoorbeeld (1974, 3000) en (1985, 5000) 1
- $q = \frac{5000 - 3000}{11} \approx 180$ (of nauwkeuriger) 1
- Van de waarde bij 1974 tot de waarde bij 1982 zijn (ongeveer) 2,5 perioden, dus de periode is 3,2 jaar 1
- Voor b geldt: $b = \frac{2\pi}{3{,}2} \approx 2$ (of nauwkeuriger) 1
- Het invullen van een punt op de modellijn, bijvoorbeeld (1975, 3600), om a te vinden wat leidt tot $3000 + 180 \cdot 1 + a \cdot \sin(2 \cdot 1) = 3600$ dus $a \approx 460$ (of nauwkeuriger) 1

Opmerkingen

– *Als een kandidaat a berekend heeft op basis van de verticale afstand van een extreem van de modellijn tot de trendlijn, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

– *Voor elk van de af te lezen aantallen broedparen is de toegestane marge 50.*

Topjaar voor appel en peer

19 **maximumscore 8**

Een aanpak als:

- Voor de opbrengst per hectare van de appels in tonnen per jaar OA geldt (bij benadering) het verband: $OA = 30 + 0{,}7t$, t in jaren met $t = 0$ in 1992 1
- Voor de opbrengst per hectare van de peren in tonnen per jaar OP geldt (bij benadering) het verband: $OP = 21 + 0{,}7t$, t in jaren met $t = 0$ in 1992 1
- Voor de oppervlakte van appelbomen in hectare TA geldt (bij benadering) $TA = 17\,000 - 453t$, t in jaren met $t = 0$ in 1992 1
- Voor de oppervlakte van perenbomen in hectare TP geldt (bij benadering) $TP = 5500 + 144t$, t in jaren met $t = 0$ in 1992 1
- De totale opbrengst van appels: $TOA = (30 + 0{,}7t)(17\,000 - 453t)$ 1
- De totale opbrengst van peren: $TOP = (21 + 0{,}7t)(5500 + 144t)$ 1
- Beschrijven hoe de ongelijkheid $TOA < TOP$ kan worden opgelost 1
- Het antwoord $t \approx 22{,}1$, dus in het jaar 2015 is de perenopbrengst voor het eerst groter dan de appelopbrengst 1

of

- Een tabel met appelopbrengsten met ten minste drie verschillende jaren, bijvoorbeeld — 1

jaar	1992	2011	2014
ton appels/ha	30	43	45

- Een vergelijkbare tabel met perenopbrengsten, bijvoorbeeld — 1

jaar	1992	2011	2014
ton peren/ha	21	34	36

- Een tabel met appelboomoppervlaktes met ten minste drie verschillende jaren, bijvoorbeeld — 1

jaar	1992	2011	2014
oppervlakte appelbomen (ha)	17000	8400	7040

- Een vergelijkbare tabel met perenboomoppervlaktes, bijvoorbeeld — 1

jaar	1992	2011	2014
oppervlakte perenbomen (ha)	5500	8200	8630

- Een combinatietabel met daarin in ieder geval de totale opbrengsten in drie verschillende jaren, bijvoorbeeld — 2

jaar	1992	2011	2014
totale opbrengst appels *TOA* (ton)	510 000	361 200	316 800
totale opbrengt peren *TOP* (ton)	115 500	278 800	310 680

- Beschrijven hoe, bijvoorbeeld met uitbreiden van de tabel en inklemmen, de ongelijkheid $TOA < TOP$ kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: in het jaar 2015 is de perenopbrengst voor het eerst groter dan de appelopbrengst — 1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 29 mei naar Cito.

Correctievoorschrift VWO

2012

tijdvak 2

wiskunde A (pilot)

Het correctievoorschrift bestaat uit:

1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Inzenden scores

1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.
Voorts heeft het College voor Examens (CvE) op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet CvE de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

1. De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
2. De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommitteerde toekomen.
3. De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.

4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.

5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommitteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommitteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Examens van toepassing:

1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.

2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.

3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:

3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;

3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel;

3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;

3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;

3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;

3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;

3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.
Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.
Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht.
Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 82 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt afgetrokken tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Woordenschat

1 maximumscore 4

	• De toename van de 4e tot de 8e verjaardag is 3000	1
	• De toename van de 8e tot de 12e verjaardag is 11000	1
	• De toenamen per jaar zijn respectievelijk 750 en 2750	1
	• Het antwoord: 2000	1

2 maximumscore 3

	• Voor de groeifactor g geldt: $g^9 = \frac{150\,000}{17\,000}$	1
	• Beschrijven hoe hieruit de waarde van g gevonden kan worden	1
	• Het antwoord 1,274	1

3 maximumscore 6

	• Voor $W_l = at + b$ geldt: $a = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{45\,000 - 17\,000}{21 - 12} \approx 3111$ (of nauwkeuriger)	1
	• $t = 6$ geeft $W_l = 3111 \cdot 6 + 17\,000 = 35\,666$	1
	• Gezocht wordt de oplossing van $W_h = 35\,666$	1
	• Beschrijven hoe $17\,000 \cdot 1{,}27^t = 35\,666$ (of $17\,000 \cdot 1{,}274^t = 35\,666$) opgelost kan worden	1
	• $W_h = 35\,666$ geeft $t \approx 3{,}1$ (of nauwkeuriger)	1
	• Het verschil is 2,9 jaar ofwel 35 (maanden) (of 2 jaar en 11 maanden)	1

4 maximumscore 3

- $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^{L-12}$ 1
- $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^{L} \cdot 1{,}27^{-12}$ 1
- $17\,000 \cdot 1{,}27^{-12}$ geeft voor b de waarde 970 (dus $W_h = 970 \cdot 1{,}27^{L}$) 1

of

- De groeifactor blijft 1,27 1
- Er geldt $b \cdot 1{,}27^{12} = 17\,000$ 1
- Dit geeft voor b de waarde 970 (dus $W_h = 970 \cdot 1{,}27^{L}$) 1

Algen

5 maximumscore 4

- De evenwichtsstand is $\frac{57+13}{2} = 35$ 1
- De amplitude is $57 - 35 = 22$ 1
- De periode is 24 uur dus $c = \frac{2\pi}{24}$ ($\approx 0{,}26$) 1
- Een correcte formule, bijvoorbeeld $F = 35 + 22\sin(0{,}26(t-3))$ 1

Opmerking
Bij het aflezen van de grafiek is een maximale afleesmarge van 2 in de waarden van F en t toegestaan.

6 maximumscore 5

- De vergelijking $2{,}0 + 1{,}6\sin(\frac{1}{12}\pi(t-18)) = 3$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Twee verschillende oplossingen, bijvoorbeeld $t \approx 3{,}421$ en $t \approx 20{,}579$ 1
- De lichtintensiteit is gedurende 6,842 uur groter dan 3 eenheden 1
- Dat komt overeen met 6 uur en 51 (of 50) minuten (of 411 (of 410) minuten) 1

7 maximumscore 4

- De maximale afname vindt plaats bij het steilst dalende deel van de grafiek 1
- Het tekenen van een raaklijn aan de grafiek van G bij bijvoorbeeld het punt met $t = 6$ op de uitwerkbijlage 1
- Het berekenen van de helling van deze lijn, bijvoorbeeld een daling van 9 eenheden per 24 uur 1
- Het antwoord 0,4 (eenheden per uur) (of nauwkeuriger) 1

Tsunami

8 maximumscore 4

- Bij de eerste waarde geldt: $160 = 11{,}3\sqrt{d}$ — 1
- De ontbrekende waarde van *d* is 200 (meter) (of nauwkeuriger) — 1
- Bij de tweede waarde geldt: $80 = 11{,}3\sqrt{d}$ — 1
- De ontbrekende waarde van *d* is 50 (meter) (of nauwkeuriger) — 1

9 maximumscore 3

- De snelheid van de tsunami is $v = 11{,}3\sqrt{3000} \approx 619$ km/uur (of nauwkeuriger) — 1
- De tsunami legt 150 km af in 0,24 uur (of nauwkeuriger) — 1
- Het antwoord: 15 minuten (of nauwkeuriger) — 1

10 maximumscore 4

- $h = \left(\frac{1000}{d}\right)^{0{,}25} \cdot 0{,}6$ — 1
- Dit herleiden tot $h = 1000^{0{,}25} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^{0{,}25} \cdot 0{,}6$ — 1
- $1000^{0{,}25} \cdot 0{,}6 \approx 3{,}37$ — 1
- $\left(\frac{1}{d}\right)^{0{,}25} = \frac{1}{d^{0{,}25}} = d^{-0{,}25}$ (dus $h = 3{,}37 \cdot d^{-0{,}25}$) — 1

11 maximumscore 4

- Een schets van de grafiek van de afgeleide van *h* — 2
- Een uitleg waarbij duidelijk wordt gemaakt dat als *d* kleiner is, $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}d}$ een grotere negatieve waarde heeft — 1
- De conclusie dat de toename van de golfhoogte groter wordt — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Fruitvliegjes

12 maximumscore 4

- Groeifactor per 3 weken is $\frac{1065}{140} \approx 7,61$ — 1
- Groeifactor per week is $7,61^{\frac{1}{3}} \approx 1,97$ — 1
- De beginhoeveelheid is gelijk aan $140 \cdot 1,97^{-2} \approx 36$ — 1
- De formule: $F = 36 \cdot 1,97^{t}$ — 1

13 maximumscore 3

- Op $t = 0$ geldt $F \approx 6,2$ (of nauwkeuriger) — 1
- De horizontale asymptoot horend bij deze formule is $F = 340$ — 1
- Dus geldt: minstens 6 en hoogstens 340 fruitvliegjes — 1

Opmerkingen

- *Als voor de ondergrens het antwoord "meer dan 6" of "minstens 7" wordt gegeven, geen scorepunt in mindering brengen.*
- *Als voor de bovengrens het antwoord "minder dan 340" of "hoogstens 339" wordt gegeven, geen scorepunt in mindering brengen.*

14 maximumscore 6

- $F'(t) = \dfrac{0 - 340 \cdot 54\mathrm{e}^{-0,24t} \cdot -0,24}{(1 + 54\mathrm{e}^{-0,24t})^2}$ — 2
- Herleiden tot $F'(t) = \dfrac{4406,4\mathrm{e}^{-0,24t}}{(1 + 54\mathrm{e}^{-0,24t})^2}$ — 1
- Beschrijven hoe (bijvoorbeeld met de GR) het maximum van $F'(t)$ gevonden kan worden — 1
- De oplossing $t \approx 16,6$ (of nauwkeuriger) — 1
- Het antwoord: 26 (of 27) november (2011) — 1

15 maximumscore 4

- De mannelijke fruitvliegjes zijn op $\binom{8}{2}$ = 28 manieren te selecteren — 1
- De vrouwelijke fruitvliegjes zijn op $\binom{8}{2}$ = 28 manieren te selecteren — 1
- Het totaal aantal samenstellingen is $28 \cdot 28 = 784$ — 2

Websites

16 maximumscore 4

- Het hoogste en het laagste punt waarbij de Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000 ligt aangeven op de uitwerkbijlage — 1
- De bijbehorende aantallen (unieke) bezoekers per dag zijn respectievelijk 180 000 en 28 000 — 2
- Het gevraagde verschil is 152 000 — 1

Opmerking
Voor het hoogste punt een afleesmarge van 10 000 hanteren, voor het laagste punt een afleesmarge van 1000.

17 maximumscore 3

- Er moet gelden: $25000 = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- $r \approx 52\,000$ (of nauwkeuriger) — 1

18 maximumscore 3

- $B = \dfrac{1118\,000}{r^{0,35}}$ — 1
- Als r groter wordt, wordt ook $r^{0,35}$ groter — 1
- Dus B wordt kleiner (en dus daalt de grafiek van B) — 1

of

- $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} = -391\,300 \cdot r^{-1,35}$ — 1
- $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r}$ is (voor elke waarde van r) negatief — 1
- Dus de grafiek van B daalt — 1

19 maximumscore 4

- $\log B = \log(1118\,000 \cdot r^{-0,35})$ — 1
- $\log B = \log 1118\,000 + \log(r^{-0,35})$ — 1
- $\log B = \log 1118\,000 - 0,35 \cdot \log r$ — 1
- $\log 1118\,000 \approx 6,05$ dus $a = 6,05$ (of nauwkeuriger) en $b = -0,35$ — 1

Puzzelstukjes

20	**maximumscore 7**	
	• Uit berekeningen, tekeningen en/of redeneringen volgt dat het aantal hoekstukjes 4 is	2
	• Uit berekeningen, tekeningen en/of redeneringen volgt dat het aantal randstukjes 8 is	2
	• Uit berekeningen, tekeningen en/of redeneringen volgt dat het aantal overige stukjes 6 is	2
	• Er zijn 18 verschillende vormsoorten	1

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per school in het programma WOLF.
Zend de gegevens uiterlijk op 22 juni naar Cito.

College voor Examens
info@cve.nl