



College voor Toetsen en Examens

WISKUNDE C VWO

SYLLABUS CENTRAAL EXAMEN 2019

Versie 2, april 2017

© 2017 College voor Toetsen en Examens vwo, havo, vmbo, Utrecht.

Alle rechten voorbehouden. Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Inhoud

Voorwoord	4
1 Inleiding	5
1.1 Wiskunde C in de tweede fase	5
1.2 Het centraal examen wiskunde C	5
1.3 Totstandkoming syllabus	5
1.4 Domeinindeling	7
2 Specificaties	8
2.1 Toelichting op de specificaties	8
2.1.1 Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden	8
2.1.2 Nauwkeurigheid en afronden	8
2.1.3 Voorbeeldopgaven en examenopgaven	8
2.1.4 Algebraïsche vaardigheden	8
2.1.5 ICT	9
2.2 Specificaties	10
3 Voorbeeldopgaven en examenopgaven	16
Bijlage 1 Examenprogramma	50
Bijlage 2 Examenwerkwoorden	53
Bijlage 3 Begrippenlijst	55
Bijlage 4 Algebraïsche vaardigheden	61

Voorwoord

De minister heeft de examenprogramma's op hoofdlijnen vastgesteld. In het examenprogramma zijn de exameneenheden aangewezen waarover het centraal examen (CE) zich uitstrekt: het CE-deel van het examenprogramma. Het examenprogramma geldt tot nader order.

Het College voor Toetsen en Examens (CvTE) geeft in een syllabus, die in beginsel jaarlijks verschijnt, een toelichting op het CE-deel van het examenprogramma. Behalve een beschrijving van de exameneisen voor een centraal examen kan de syllabus verdere informatie over het centraal examen bevatten, bijvoorbeeld over een of meer van de volgende onderwerpen: specificaties van examenstof, begrippenlijsten, bekend veronderstelde onderdelen van domeinen of exameneenheden die verplicht zijn op het schoolexamen, bekend veronderstelde voorkennis uit de onderbouw, bijzondere vormen van examinering (zoals computerexamens), voorbeeldopgaven, toelichting op de vraagstelling, toegestane hulpmiddelen.

Ten aanzien van de syllabus is nog het volgende op te merken. De functie ervan is een leraar in staat te stellen zich een goed beeld te vormen van wat in het centraal examen wel en niet gevraagd kan worden. Naar zijn aard is een syllabus dus niet een volledig gesloten en afgebakende beschrijving van alles wat op een examen zou kunnen voorkomen. Het is mogelijk, al zal dat maar in beperkte mate voorkomen, dat op een CE ook iets aan de orde komt dat niet met zo veel woorden in deze syllabus staat, maar dat naar het algemeen gevoelen in het verlengde daarvan ligt.

Een syllabus is zodoende een hulpmiddel voor degenen die anderen of zichzelf op een centraal examen voorbereiden. Een syllabus kan ook behulpzaam zijn voor de producenten van leermiddelen en voor nascholingsinstanties. De syllabus is niet van belang voor het schoolexamen. Daarvoor zijn door de SLO handreikingen geproduceerd die niet in deze uitgave zijn opgenomen.

Deze syllabus geldt voor het examenjaar 2019. Syllabi van eerdere jaren zijn niet meer geldig en kunnen van deze versie afwijken. Voor het examenjaar 2020 wordt een nieuwe syllabus vastgesteld.

Het CvTE publiceert uitsluitend digitale versies van de syllabi. Dit gebeurt via Examenblad.nl (www.examenblad.nl), de officiële website voor de examens in het voortgezet onderwijs.

Een syllabus kan zo nodig ook tussentijds worden aangepast, bijvoorbeeld als een in de syllabus beschreven situatie feitelijk veranderd is. De aan een centraal examen voorafgaande Septembermededeling is dan het moment waarop dergelijke veranderingen bekendgemaakt worden. Kijkt u voor alle zekerheid jaarlijks in september op Examenblad.nl. In de syllabi 2019 zijn de wijzigingen ten opzichte van de vorige syllabus voor het examenjaar 2018 duidelijk zichtbaar. Inhoudelijke wijzigingen zijn geel gemarkeerd. Er zijn diverse vakken waarbij de syllabus 2018 geen inhoudelijke veranderingen heeft ondergaan.

Voor opmerkingen over syllabi houdt het CvTE zich steeds aanbevolen. U kunt die zenden aan info@cvte.nl of aan CvTE, Postbus 315, 3500 AH Utrecht.

De voorzitter van het College voor Toetsen en Examens,
Drs. P.J.J. Hendrikse

1 Inleiding

Deze syllabus specificeert de eindtermen van het CE-deel van het nieuwe examenprogramma wiskunde C vwo. In dit verband wordt eerst kort de achtergrond van het nieuwe programma beschreven.

1.1 Wiskunde C in de tweede fase

Het vak wiskunde C is een verplicht profielvak in het profiel Cultuur & Maatschappij. In dit profiel mogen de leerlingen in plaats van wiskunde C ook wiskunde A of wiskunde B als profielvak kiezen, mits het bevoegd gezag dat toestaat. Het is in het eerste tijdvak niet mogelijk wiskunde C te combineren met een van de andere wiskundeprogramma's.¹

Naast wiskunde C (of A/B) bevat het profiel Cultuur & Maatschappij als verplicht profielvak geschiedenis. Daarnaast moeten deze leerlingen één van de volgende culturele profielkeuzevakken kiezen: een kunstvak, filosofie, een moderne vreemde taal of een klassieke taal. Tevens moeten deze leerlingen één van de volgende maatschappelijke profielkeuzevakken kiezen: aardrijkskunde, maatschappijwetenschappen of economie.

De omvang van het vak wiskunde C is 480 SLU. Hiervan beslaat het in deze syllabus gespecificeerde CE-deel ongeveer 60%. Bij de totstandkoming van de syllabus is een inschatting gemaakt van de studielast die nodig is om de beschreven stof aan te leren.

1.2 Het centraal examen wiskunde C

De zitting en de zittingsduur van het centraal examen worden gepubliceerd op www.examenblad.nl. Ook wordt daar dan een lijst gepubliceerd met hulpmiddelen die bij het examen zijn toegestaan.

In bijlage 2 is een lijst opgenomen van de specifieke betekenissen van de in het centraal examen gebruikte examenwerkwoorden voor alle wiskundevakken havo/vwo met een centraal examen. Deze lijst is niet uitputtend.

1.3 Totstandkoming syllabus

In het kader van de vernieuwing van het onderwijs in de vijf bètavakken (biologie, natuurkunde, NLT, scheikunde en wiskunde) heeft het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap in november 2006 de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs ingesteld.² Deze commissie had de opdracht een integraal examenprogramma te ontwerpen en te toetsen in een innovatietraject.

In 2009 is door deze commissie onder meer een concept vernieuwd examenprogramma wiskunde C geformuleerd. Bij dit concept-examenprogramma is door een breed samengestelde syllabuscommissie wiskunde C een werkversie van een syllabus ontwikkeld. Hierbij heeft de syllabuscommissie rekening gehouden met de uitvoerbaarheid van het programma en de uitgangspunten van cTWO:

¹ Op dit moment is een wijziging in het Examenbesluit in behandeling, die het combineren van meerdere wiskundeprogramma's wel mogelijk maakt. Totdat de wijziging in het Examenbesluit een feit is, is de situatie zoals hierboven beschreven. Leerlingen kunnen gebruik maken van de nu geldende gedoogafpraak die de staatssecretaris heeft gemaakt met de schooldecanen, inhoudend dat het profiel vak wordt afgelegd in het eerste tijdvak en het extra vak in het tweede tijdvak.

² Zie cTWO (2012) *Denken en doen, Wiskunde op havo en vwo per 2015, Eindrapport van de vernieuwingscommissie cTWO*. Utrecht: cTWO.
Zie ook cTWO (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

Het vak bereidt voor op universitaire vervolgstudies in de sector Gedrag en Maatschappij, de sector Recht en de sector Taal en Cultuur. Inhoudelijk ligt de nadruk op statistiek, op toegepaste analyse en op de kunsthistorische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij.

De inhoud is niet alleen van belang voor vervolgopleidingen, maar dient ook een meer algemeen vormende waarde. Leerlingen worden voorbereid op de (informatie)maatschappij en zij leren in verschillende situaties wiskundige aspecten te herkennen, te interpreteren en te gebruiken. Daarnaast leren leerlingen de mogelijkheden van wiskundige toepassingen op waarde te schatten. Het programma besteedt vooral aandacht aan het toepassen van wiskundige vaardigheden in authentieke situaties met een kunsthistorische of culturele achtergrond – te weten modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, en logisch redeneren – alsmede voor het functioneel gebruiken van ICT daarbij. Hiermee wordt de kern van de vernieuwing weergegeven.

Zie voor een nadere uitwerking van de genoemde wiskundige vaardigheden ook subdomein A3 en de specificaties daarbij.

De eerste concepten van het examenprogramma, de syllabus en centrale examens zijn in de periode 2009-2012 getest in een pilot. De uitkomsten van de pilot hebben geleid tot herzieningen van het examenprogramma en de syllabus.

De syllabi voor wiskunde A, B en C zijn onderling afgestemd voor wat betreft format en inhoud.

Door middel van een landelijke veldraadpleging is de mening van wiskundedocenten en andere betrokkenen over de nieuwe syllabus gepeild. De resultaten van deze veldraadpleging zijn door de syllabuscommissie gewogen en in deze syllabus verwerkt.

1.4 Domeinindeling

Het examenprogramma staat in bijlage 1. Het betreft het programma met globale eindtermen, waarvan het CE-deel in hoofdstuk 2 van deze syllabus wordt gespecificeerd. Het SE-deel is nader gespecificeerd in een [handreiking](#) van SLO. In de handreiking zijn suggesties opgenomen voor het SE-deel welke dus niet bindend zijn.

In de onderstaande tabel staat vermeld welke domeinen in het CE geëxamineerd kunnen worden:

Domein	Subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden	A1: Algemene vaardigheden	X	X	
	A2: Profielspecifieke vaardigheden	X	X	
	A3: Wiskundige vaardigheden	X	X	
B Algebra en tellen	B1: Rekenen en algebra	X		X
	B2: Telproblemen*	X*		X
C Verbanden		X		X
D Veranderingen		X		X
E Statistiek en kansrekening	E1: Probleemstelling en onderzoeksontwerp		X	
	E2: Visualisatie van data		X	
	E3: Kwantificering		X	
	E4: Kansbegrip		X	
	E5: Kansverdelingen		X	
	E6: Statistiek met ICT		X	
F Logisch redeneren		X		X
G Vorm en Ruimte		X		X
H Keuzeonderwerpen			X	

* Tijdelijke afwijking voor 2018 en 2019

In het centraal examen van 2018 en 2019 zullen GEEN vragen worden gesteld over subdomein B2. Het onderwerp mag wel getoetst worden in het SE, maar dat is niet verplicht. Meer informatie hierover is te vinden in de handreiking van SLO.

NB. Het feit dat het hier een tijdelijke afwijking betreft, houdt in dat er vanaf het centraal examen van 2020 wel vragen gesteld kunnen worden over subdomein B2.

2 Specificaties

2.1 Toelichting op de specificaties

2.1.1 *Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden*

Bij de specificatie van de globale eindtermen is onderscheid gemaakt tussen parate vaardigheden en productieve vaardigheden. Bovendien is bij een aantal subdomeinen opgenomen over welke parate kennis de kandidaat dient te beschikken. Deze indeling is bedoeld om aan te geven wat het verwachte kennis- en beheersingsniveau van de kandidaat is.

Met parate vaardigheden wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat routinematig moet beheersen.

Bij productieve vaardigheden is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.

Bij parate kennis gaat het om kennis waarover de kandidaat dient te beschikken en die niet uit de formuleringen van de parate en/of productieve vaardigheden blijkt. De opsomming van parate kennis is daarmee een aanvulling op de parate en productieve vaardigheden. Parate kennis die bij een subdomein wordt genoemd, kan ook bij andere subdomeinen voorkomen en wordt dan ook binnen het totale CE-deel van het examenprogramma als parate kennis beschouwd.

In bijlage 3 staat voor de verschillende wiskundevakken een overzicht van de wiskundige begrippen die bekend verondersteld worden bij het centraal examen. De begrippen die in dit overzicht aangegeven worden kunnen zonder toelichting worden gebruikt in het centraal examen. Dit overzicht is niet uitputtend.

2.1.2 *Nauwkeurigheid en afronden*

Als in een examenopgave niet vermeld is in welke nauwkeurigheid het antwoord gegeven dient te worden, dient de kandidaat die nauwkeurigheid uit de probleemsituatie af te leiden. Het kiezen van een passende maateenheid valt hieronder. Als de probleemsituatie dit toelaat, mag een nauwkeuriger antwoord gegeven worden dan de nauwkeurigheid die de kandidaat uit de probleemsituatie afgeleid zou kunnen hebben. Het correctievoorschrift geeft hier uitsluitel over.

Een kandidaat kan uit de probleemsituatie afleiden wanneer afronden volgens de gebruikelijke afrondingsregels (6,4 wordt 6 en 6,5 wordt 7) niet van toepassing is. Een kandidaat moet weten dat tussentijds afronden gevolgen kan hebben voor het eindantwoord en dient hiernaar te handelen.

2.1.3 *Voorbeeldopgaven en examenopgaven*

In hoofdstuk 3 worden de specificaties per (sub)domein geïllustreerd door middel van voorbeeldopgaven en examenopgaven. In dat hoofdstuk wordt dit verder toegelicht.

2.1.4 *Algebraïsche vaardigheden*

Bij de specificaties is ervan uitgegaan dat de kandidaten bekend zijn met de vereiste algebraïsche vaardigheden. Voor alle wiskundevakken havo/vwo met een centraal

examen wordt een overzicht van deze algebraïsche vaardigheden gegeven in bijlage 4. Hoewel bij het samenstellen van dit overzicht de grootst mogelijke nauwkeurigheid is nagestreefd, kan niet gegarandeerd worden dat deze uitputtend is.

2.1.5

ICT

In het CE wordt met ICT de grafische rekenmachine bedoeld. Zie hiervoor te zijner tijd de Vooruitblik en Regeling toegestane hulpmiddelen (zie ook paragraaf 1.2).

2.2 Specificaties

Domein A Vaardigheden

Subdomein A1 Algemene vaardigheden

De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan

1. doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken;
2. adequaat schriftelijk, mondeling en digitaal communiceren over onderwerpen uit de wiskunde;
3. bij het verwerven van vakkennis en vakvaardigheden reflecteren op eigen belangstelling, motivatie en leerproces;
4. toepassingen en effecten van wiskunde in het dagelijks leven en in verschillende vervolgopleidingen en beroepssituaties herkennen en benoemen.

Subdomein A2 Profielspecifieke vaardigheden

De kandidaat herkent de betekenis van wiskunde in de maatschappij en in cultuurhistorische contexten en kan deze in concrete situaties beschrijven.

De kandidaat

1. kan ideeën over en de betekenis van wiskunde in bijvoorbeeld beeldende kunst, architectuur, dans en muziek herkennen en beschrijven;
2. kent van enkele wiskundige onderwerpen de ontwikkeling vanuit een cultuurhistorische context;
3. kan van een wiskundige modelsituatie de beperkingen en de kracht aangeven.

Subdomein A3 Wiskundige vaardigheden

De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige vaardigheden, waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

De kandidaat

1. beheerst de rekenregels;
2. beheerst de specifieke algebraïsche vaardigheden;
3. heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren;
4. kan wiskundige informatie ordenen en in probleemsituaties de wiskundige structuur onderkennen;
5. kan bij een gegeven probleemsituatie een model opstellen in wiskundige termen;
6. kan een oplossingsstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren binnen de context;
7. kan vakspecifieke taal interpreteren en gebruiken;
8. kan de correctheid van wiskundige redeneringen verifiëren;
9. kan eenvoudige wiskundige redeneringen correct onder woorden brengen;
10. kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij het geven van wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen;
11. kan antwoorden afronden op een voorgeschreven nauwkeurigheid dan wel op een nauwkeurigheid die past bij de probleemsituatie.³

³ Zie de toelichting in paragraaf 2.1.2.

Domein B Algebra en tellen

Subdomein B1 Rekenen en algebra

De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen en kan daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen.

Opmerking:

Rekenen met getallen is bij veel wiskundige handelingen een onderliggende vaardigheid die essentieel is, ook in de centrale examens wiskunde. De rekenvaardigheden, genoemd in subdomein B1, zullen hoofdzakelijk impliciet worden getoetst.

In zogenaamde opstapvragen, de eerste vragen binnen een probleemsituatie, is het echter denkbaar dat alleen een beroep wordt gedaan op rekenvaardigheden. Deze vragen hebben als doel om een kandidaat vertrouwd te maken met de probleemsituatie. Ook zijn grotere vragen denkbaar waar rekenen een belangrijke rol speelt, maar dan altijd in relatie tot andere wiskundige vaardigheden zoals beschreven in domein A. Voorbeelden van vragen waar rekenen toch een belangrijke rol kan spelen zijn te vinden in hoofdstuk 3 van deze syllabus.

Parate kennis

De kandidaat kent

- de begrippen absoluut en relatief.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan

1. berekeningen maken met en zonder variabelen waarbij gebruik gemaakt wordt van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels, maar niet die voor het werken met logaritmen;
2. berekeningen maken met verhoudingen, percentages en breuken;
3. werken met haakjes en vereenvoudigen door haakjes weg te werken.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan

4. rekenregels gebruiken om algebraïsche expressies te herleiden en te verifiëren;
5. berekeningen maken met verhoudingen, percentages en breuken met daarin een of meer variabelen;
6. werken met grootheden, samengestelde grootheden en maatsystemen, en eenheden omrekenen.

Subdomein B2 Telproblemen

De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan

1. het aantal permutaties en het aantal combinaties berekenen en deze gebruiken, desgevraagd in verband met de driehoek van Pascal;
2. gebruik maken van een gegeven boomdiagram, gegeven wegendiagram, gegeven rooster en gegeven driehoek van Pascal.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan

3. bij een telprobleem aangeven of er gebruik kan worden gemaakt van permutaties dan wel combinaties;
4. bij een telprobleem mogelijkheden systematisch ordenen en eenvoudige symmetrieoverwegingen gebruiken;
5. bij een telprobleem een passende representatie, waaronder boomdiagram, wegendiagram en rooster, maken;
6. een probleem als een telprobleem identificeren;
7. bij een telprobleem een strategie bedenken en daarmee het probleem oplossen.

Domein C Verbanden

De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de verschillende representaties doelgericht gebruiken, kan bijbehorende vergelijkingen oplossen, waar nodig met behulp van ICT, en kan periodieke verschijnselen beschrijven.

Parate kennis

De kandidaat kent

- eerstegraadsverbanden $y = a \cdot x + b$;
- tweedegraadsverbanden $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$;
- machtsverbanden $y = a \cdot x^p$ (p rationaal);
- exponentiële verbanden $y = b \cdot g^x$ (niet $y = b \cdot e^x$), inclusief de begrippen exponent, beginwaarde en groefactor;
- logaritmische verbanden $y = {}^g \log(x)$ (niet $y = \ln(x)$);
- de regel $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$.
- de volgende bij de grafieken van de genoemde verbanden behorende karakteristieke eigenschappen
 - snijpunt(en) met de x -as en met de y -as,
 - maximum(waarde) en minimum(waarde),
 - asymptotisch gedrag.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan

1. bij een gegeven formule een tabel en een grafiek maken;
2. van de verbanden, genoemd onder parate kennis, de grafieken herkennen;
3. van de verbanden, genoemd onder parate kennis, de karakteristieke eigenschappen benoemen;

4. verbanden van de vorm $y = a \cdot x$ ((recht) evenredig) en van de vorm $y = \frac{a}{x}$ (omgekeerd evenredig) herkennen en hun karakteristieke eigenschappen (recht evenredig: bijzondere vorm van lineair verband, omgekeerd evenredig: bijzondere vorm van constant product) benoemen;
5. aan de hand van een tabel vaststellen of er sprake is van een lineair of exponentieel verband;
6. bij de formules van de vorm $y = a \cdot x + b$, $y = b \cdot g^x$, $y = a \cdot x^p$ en $y = g \log(x)$ de variabele x uitdrukken in y ;
7. van een periodieke verschijnsel de periode, amplitude en de evenwichtswaarde bepalen;
8. lineair interpoleren en lineair extrapoleren bij twee of meer gegeven meetwaarden;
9. op een logaritmische schaalverdeling meetwaarden aflezen en aangeven;
10. bij een exponentieel verband een formule opstellen aan de hand van een tabel;
11. een gegeven groeifactor omrekenen naar een groeipercentage, en omgekeerd;
12. bij een gegeven groeifactor de halveringstijd/verdubbelingstijd berekenen, en omgekeerd.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan

13. binnen een probleemsituatie de verschillende representaties van een verband (formule, tabel, grafiek, tekst) doelgericht gebruiken;
14. de verbanden, genoemd onder parate kennis en C.4, en hun grafieken gebruiken met hun karakteristieke eigenschappen;
15. de verbanden, genoemd onder parate kennis en C.4, samenstellen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in probleemsituaties;
16. een trend beschrijven aan de hand van een gegeven probleemsituatie;
17. vergelijkingen en ongelijkheden in een probleemsituatie oplossen met behulp van verschillende representaties.

Domein D Veranderingen

De kandidaat kan het veranderingsgedrag van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en de regelmaat in rijen doelgericht beschrijven en gebruiken.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de notaties voor rijen: a_n en $a(n)$, waarbij n zowel bij 0 als bij 1 kan beginnen.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan

1. vaststellen op welke intervallen er sprake is van een constant, een stijgend of een dalend verloop van de grafiek van een functie en tevens vaststellen of een stijging/daling toenemend of afnemend is;
2. de gemiddelde verandering op een interval berekenen;
3. grafisch de helling van een grafiek in een punt bepalen.
4. de kandidaat kan het veranderingsgedrag van de onder de parate kennis genoemde verbanden herkennen en beschrijven met behulp van hun grafieken, tabellen en formules;
5. de termen berekenen van een rij getallen die gegeven is door een recursieve formule of een directe formule;
6. een directe formule of recursieve formule opstellen van een rij getallen waarvan gegeven is dat deze hoort bij een lineair of exponentieel verband.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan

7. het veranderingsgedrag van verbanden beschrijven op basis van een gegeven formule en dit in verband brengen met de probleemsituatie;
8. de gemiddelde verandering op een interval interpreteren binnen een probleemsituatie;
9. de helling van grafieken in verschillende punten met elkaar vergelijken.

Domein F Logisch redeneren

De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.

Parate kennis

De kandidaat kent

- de logische symbolen \wedge , \vee , \Rightarrow en \neg ;
- bij redeneringen de begrippen conclusie, uitgangspunt, definitie, redeneerstap, correct, volledig en onvolledig;
- de begrippen contradictie en paradox.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan

1. aangeven hoe een redenering is opgebouwd uit redeneerstappen;
2. "als-dan" redeneringen verbinden met de "hier-uit-volgt" conclusie;
3. gegevens uit een Venn-diagram halen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan

4. een onderscheid maken tussen een nodige en een voldoende voorwaarde;
5. de correctheid van redeneringen en daarbij horende conclusies, zoals gebruikt in het maatschappelijk debat, verifiëren en analyseren;
6. gebruik maken van voorbeelden als illustratie van een bewering en van een tegenvoorbeeld om een bewering te weerleggen;
7. een contradictie en een paradox herkennen en beschrijven;
8. verschillende representaties, zoals tabel en (Venn-)diagram, en logische symbolen gebruiken bij het analyseren en oplossen van logische problemen.

Domein G Vorm en ruimte

De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en op basis daarvan conclusies trekken over dit object.

Opmerking:

Bij het hanteren van de begrippen en methoden uit dit domein worden de probleemsituaties bij voorkeur gekozen in beeldende, architectonische en kunsthistorische context.

Parate kennis

De kandidaat kent

- de stelling van Pythagoras;
- de gulden snede als verhouding;
- de formules voor het berekenen van de oppervlakte van een rechthoek, een driehoek en een cirkel;

- de volgende inhoudsformules: $I = G \cdot h$ (voor balk, prisma en cilinder) en $I = \frac{1}{3}G \cdot h$ (voor piramide en kegel);
- de begrippen horizon, oogpunt en verdwijnpunt;
- het begrip regelmatige veelhoek.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan

1. aanzichten maken van een balk, een piramide en een prisma;
2. een éénpuntperspectieftekening en een tweepuntperspectieftekening maken van een balk;
3. het midden van elke zijde van een rechthoek in een perspectieftekening bepalen;
4. de oppervlakte van een rechthoek, een driehoek en een cirkel berekenen;
5. als de oppervlakte van het grondvlak gegeven is, de inhoud van een balk, een piramide, een prisma en een cilinder berekenen;
6. bij een gegeven vergrotingsfactor van de lengte de oppervlakte van gelijkvormige figuren en de inhoud van gelijkvormige objecten berekenen, op basis van de oppervlakte van de oorspronkelijke figuur cq. de inhoud van het oorspronkelijke object.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan

7. bij het beschrijven van vlakke meetkundige figuren gebruik maken van gelijkvormigheid en symmetrie;
8. vanuit een perspectieftekening en/of gegeven aanzichten een ruimtelijk object beschrijven;
9. bij een afbeelding nagaan of de regels van perspectieftekenen goed gehanteerd zijn;
10. gebruik maken van de oppervlakte van de figuren die genoemd zijn in G.4, en van de inhoud van de ruimtelijke objecten die genoemd zijn in G.5, om daarmee de oppervlakte en de inhoud van ruimtelijke objecten te berekenen en/of te schatten;
11. berekeningen uitvoeren m.b.t. de inhoud en de oppervlakte van gelijkvormige figuren.

3 Voorbeeldopgaven en examenopgaven

In dit hoofdstuk worden voorbeeldopgaven en examenopgaven gegeven ter verduidelijking van de specificaties in de categorie 'productieve vaardigheden'.

De examenopgaven

Om een indicatie te geven van het niveau waarop kandidaten deze specificaties dienen te beheersen op het centraal examen, wordt zoveel mogelijk verwezen naar vragen uit opgaven afkomstig uit de reeds afgenomen pilotexamens 2012 en 2013, eerste en tweede tijdvak. Daarnaast worden enkele examenopgaven genoemd die zijn ontleend aan oude examens. Ook deze zijn bedoeld ter verduidelijking van de specificaties en dienen tegelijkertijd als indicatie van het niveau van de opgaven. De genoemde examens zijn te vinden op www.examenblad.nl (onder de betreffende jaarring).

De voorbeeldopgaven

Deze opgaven zijn bedoeld ter illustratie van de specificaties, niet om het niveau aan te duiden. Deze opgaven zijn ontworpen voor de syllabus. In enkele gevallen zijn het bewerkingen van oude examenopgaven. Ook die bewerkingen zijn ter illustratie van de specificaties en niet om het niveau aan te duiden.

De voorbeeldopgaven zijn te vinden vanaf pagina 18 en de daarbij behorende uitwerkingen vanaf pagina 41.

Relatie met subdomein A3

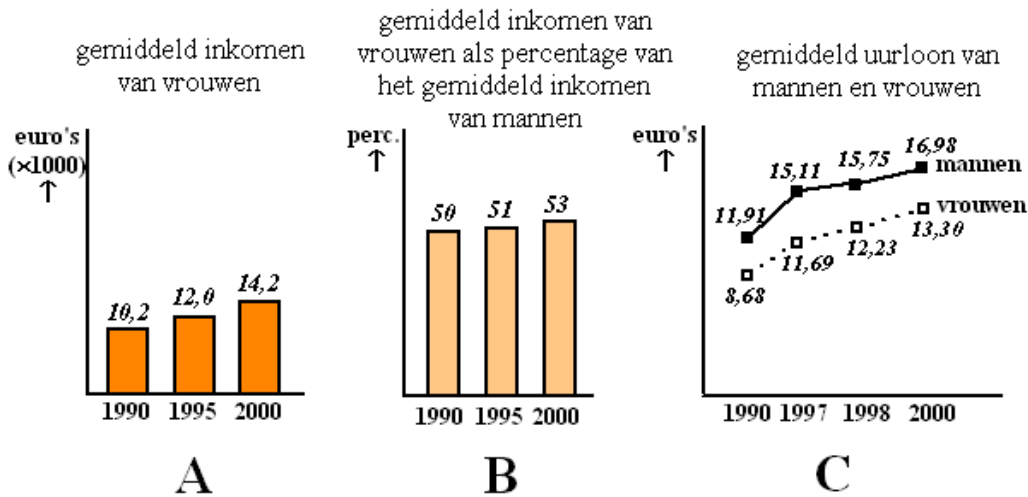
De denkactiviteiten, genoemd in subdomein A3, worden vormgegeven binnen de productieve vaardigheden.

Indeling opgaven naar (sub)domein

(Sub)domein	(Pilot)examenopgaven - <i>verduidelijking van specificaties</i> - <i>aanduiding van examenvragenniveau</i>	Voorbeeldopgaven - <i>verduidelijking van specificaties</i> - geen niveau-aanduiding
B1	wiC vwo 2011-II vragen 5 en 6	B1-1 Verdienen vrouwen minder?
	wiA1 vwo 2007-I vragen 1, 2 en 3	
B2	wiC vwo pilot 2012-I vraag 1	B2-1 Sol LeWitt
	wiC vwo 2012-II vraag 18	
	wiC vwo pilot 2013-I vraag 18	
	wiC vwo pilot 2013-II vragen 5 en 6	
C	wiC vwo pilot 2012-I vragen 3 en 4	C-1 Tandarts
	wiC vwo pilot 2012-II vragen 5 en 6	C-2 Aandeel
	wiC vwo pilot 2013-I vragen 1, 2 en 3	C-3 Soorten dieren
	wiC vwo pilot 2013-I vragen 6 en 7	C-4 Schoolreis
D	wiC vwo pilot 2012-II vraag 1	D-1 Disk
	wiC vwo pilot 2012-II vraag 7	D-2 Mobiel
	wiC vwo pilot 2013-I vragen 20 en 21	D-3 Levensduur van woningen
	wiA1 vwo 2007-I opgave Verhoudingen	
F	wiC vwo pilot 2012-I opgave Schaatskunst	F-1 Zwart-wit denken is kleurloos
	wiC vwo pilot 2012-II opgave Spaaractie	F-2 De paradox van de krokodil
	wiC vwo pilot 2013-I opgave Wie is de dader?	F-3 Roken
	wiC vwo pilot 2013-II vragen 7 en 8	F-4 Ouderavond
		F-5 Anneke
		F-6 Kunst is links
		F-7 Dalende grafiek
G	wiC vwo pilot 2012-I opgave De Nationale Bibliotheek	G-1 Het holocaust monument
	wiC vwo pilot 2013-II opgave Balken	G-2 Duccio
		G-3 Jan Dibbets
		G-4 Etagère
		G-5 Het prisma van Sanherib
		G-6 Parthenon

B1-1 Verdienen vrouwen minder?

In maart 2003 stond in de Volkskrant een artikel over de inkomensachterstand van vrouwen op mannen. Deze figuur stond erbij:



Figuur A gaat over het gemiddelde jaarinkomen van vrouwen.

- a. Toon met een berekening aan dat het gemiddelde jaarinkomen van vrouwen tussen 1990 en 2000 met ruim 39% is gestegen.

Met behulp van de figuren A en B kun je het gemiddelde jaarinkomen van de mannen berekenen. Je weet namelijk het gemiddelde jaarinkomen van de vrouwen en hoeveel procent dat is van het gemiddelde jaarinkomen van de mannen.

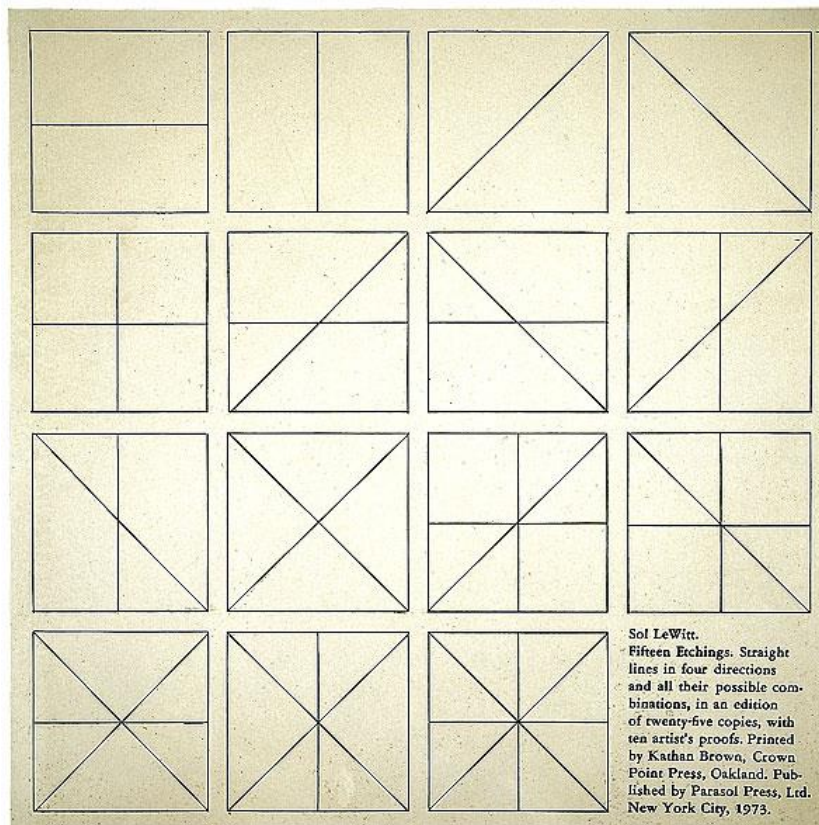
- b. Toon met berekeningen aan dat het gemiddelde jaarinkomen van de mannen tussen 1990 en 2000 met een kleiner percentage is toegenomen dan dat van de vrouwen.

Met de gegevens van 1990 en 2000 in figuur C is het mogelijk twee berekeningen uit te voeren die tot verschillende conclusies leiden over het gemiddeld uurloon van vrouwen vergeleken met dat van mannen. De ene berekening leidt tot de conclusie dat vrouwen niet zijn ingelopen op mannen. De andere berekening leidt tot de conclusie dat vrouwen wel zijn ingelopen op mannen.

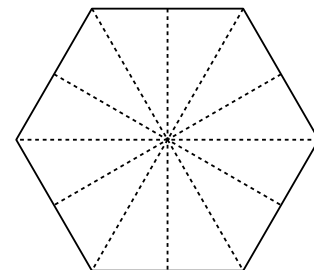
- c. Laat met berekeningen zien hoe deze twee verschillende conclusies getrokken kunnen worden.

B2-1 Sol LeWitt

De Amerikaanse beeldhouwer/schilder Sol LeWitt maakt in zijn werk vaak gebruik van wiskundige principes. Voor zijn werk "Fifteen etchings" tekende hij binnen vierkanten alle mogelijke combinaties met minstens één diagonaal of horizontale dan wel verticale middellijn.

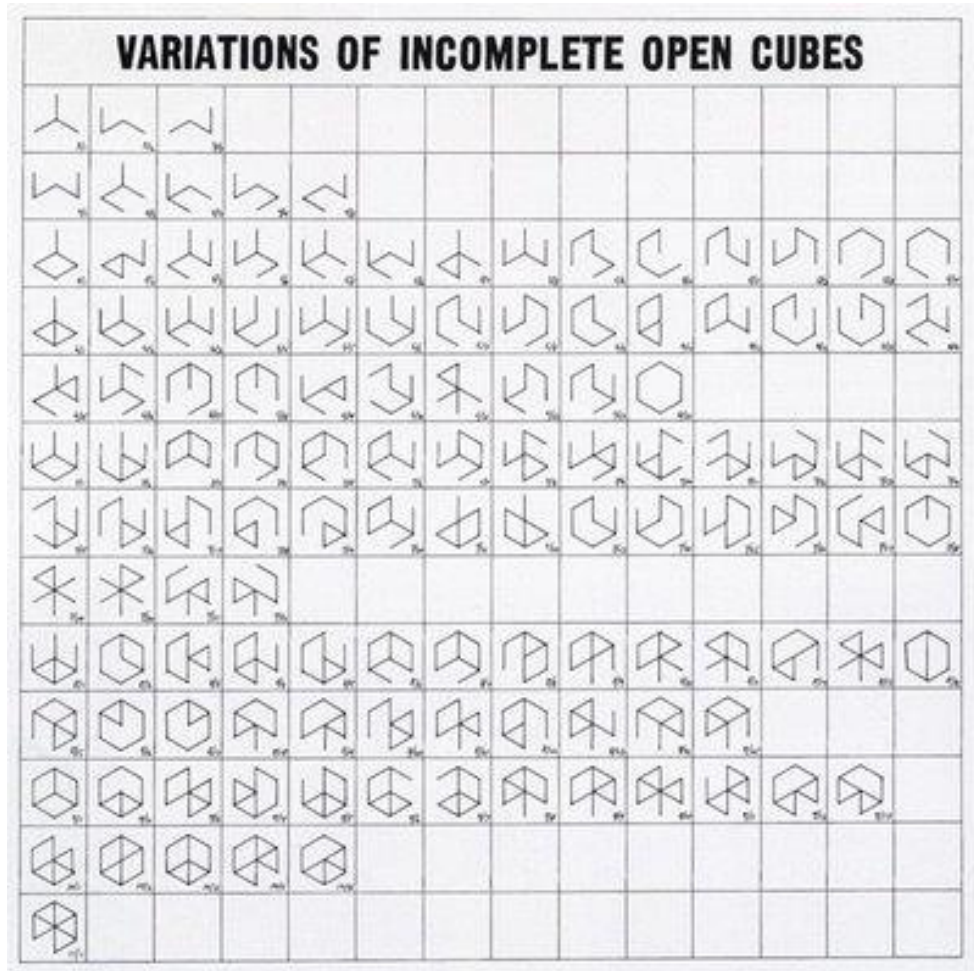


- a. Laat met behulp van een berekening of een redenering zien dat in "Fifteen etchings" inderdaad alle mogelijkheden weergegeven zijn.
- b. Stel dat Sol LeWitt uitgegaan was van regelmatige zeshoeken. De lijnen binnen de zeshoek die hij dan zou gebruiken zijn de diagonalen en de lijnstukken die de middens van de tegenover elkaar liggende zijden verbinden. Zie de figuur hiernaast. Neem aan dat Sol LeWitt besluit om vier van deze lijnstukken te gebruiken.



Hij tekent dus alle mogelijkheden waarbij vier van zulke (gestippelde) lijnstukken gebruikt worden. Hoeveel mogelijkheden zijn hiervoor?

Een ander werk waarbij Sol LeWitt uitgaat van variaties is: "Variations of incomplete open cubes".



- c. Verklaar de titel en beschrijf de opbouw van het werk.
- d. Blijkbaar wilde Sol LeWitt minimaal drie ribben van de kubus gebruiken. Stel dat dit het enige uitgangspunt was voor een werk met deze titel, maar hij wel *alle* variaties wilde tonen. Hoeveel variaties met minimaal drie en maximaal elf ribben zijn er dan?

C-1 Tandarts

Tandartsen gebruiken bij allerlei behandelingen verdovingen. Deze worden bij een zenuw ingespoten. De concentratie van een verdovingsmiddel bij de zenuw neemt exponentieel af. Na een uur is de concentratie met 90% afgenomen. Stel dat de tandarts 2,5 milligram (mg) in een zenuw spuit, dan geldt voor de hoeveelheid A die er na t uur nog is: $A = 2,5 \cdot 0,1^t$.

Om geen pijn te voelen gedurende een behandeling moet er altijd minstens 0,3 mg verdovingsmiddel in de zenuw zitten.

- a.** Hoeveel minuten kan de behandeling duren wanneer er 2,5 milligram ingespoten wordt?

In de rest van deze opgave kijken we naar het verband tussen de maximale duur van de behandeling en het aantal mg verdovingsmiddel dat een patiënt ingespoten krijgt. Hierbij houden we er rekening mee dat gedurende een behandeling er altijd minstens 0,3 mg verdovingsmiddel in de zenuw moet zitten. Het aantal mg ingespoten verdovingsmiddel noemen we V en de maximale duur van de behandeling in minuten d .

- b.** Toon aan dat geldt: $0,3 = V \cdot 0,962^d$.

Het is voor een tandarts handig als hij de beschikking heeft over een tabel waarin het verband tussen de maximale behandelingsduur (d) en de hoeveelheid in te spuiten verdovingsmiddel (V) staat. Hieronder zie je een eerste opzet van zo'n tabel:

V (in mg)	0,5	1	2	10	?
d (in minuten)	13	?	60

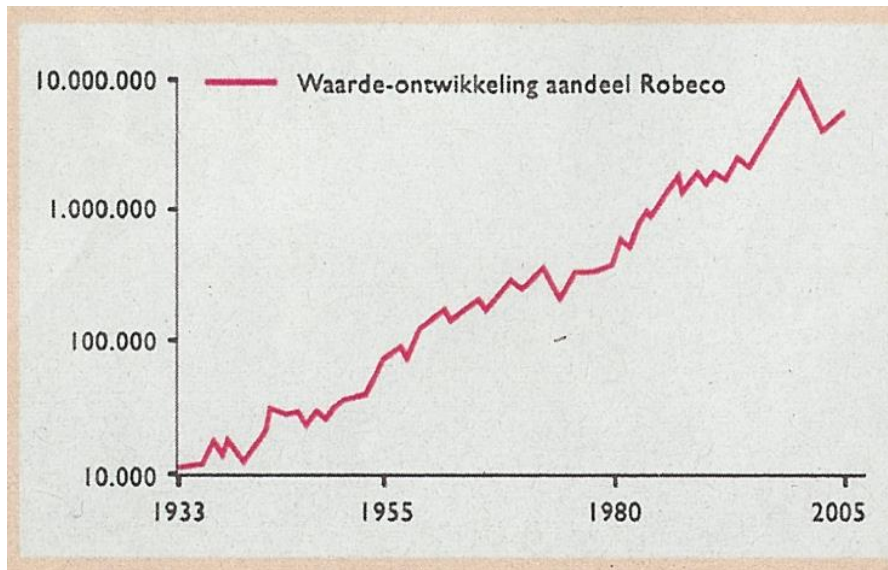
- c.** Vul de laatste twee kolommen van de tabel verder in.

Om deze tabel verder uit te breiden, is het handig om over formules te beschikken.

- d.** Maak aan de hand van de vergelijking $0,3 = V \cdot 0,962^d$ een formule waarin V wordt uitgedrukt in d .
- e.** Maak een formule waarin d wordt uitgedrukt in V .

C-2 Aandeel

Hieronder zie je een grafiek uit een advertentie. Het gaat om de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933 – 2005. Je kunt in de grafiek bijvoorbeeld aflezen dat in 2000 de waarde van het aandeel Robeco gelijk was aan 10 000 000 euro.



Let op de schaalverdeling langs de verticale as.

Er geldt: in 1980 ligt de waarde tussen 100 000 en 1 000 000. Bij deze schaalverdeling kun je zo'n tussenliggende waarde vrij nauwkeurig bepalen.

- a. Schrijf in maximaal 5 regels een uitleg waarin je demonstreert hoe je de waarde van het aandeel in 1980 bepaalt.

De waardeontwikkeling van het aandeel tussen 1933 en 2000 kan benaderd worden door een rechte lijn. Dit houdt in dat de waarde in deze periode (bijna) exponentieel groeide.

Neem aan dat de waarde in 2000 precies 10 000 000 was.

- b. Bereken (uitgaande van de exponentiële groei) met hoeveel procent de waarde van het aandeel Robeco in de periode 1933 – 2000 per jaar groeide.

Bij exponentiële groei gebruikt men vaak de verdubbelingstijd.

Met het antwoord op de vorige vraag kun je ook de verdubbelingstijd berekenen.

- c. Bereken de verdubbelingstijd. Had je bij de vorige vraag geen antwoord, gebruik dan 9%.

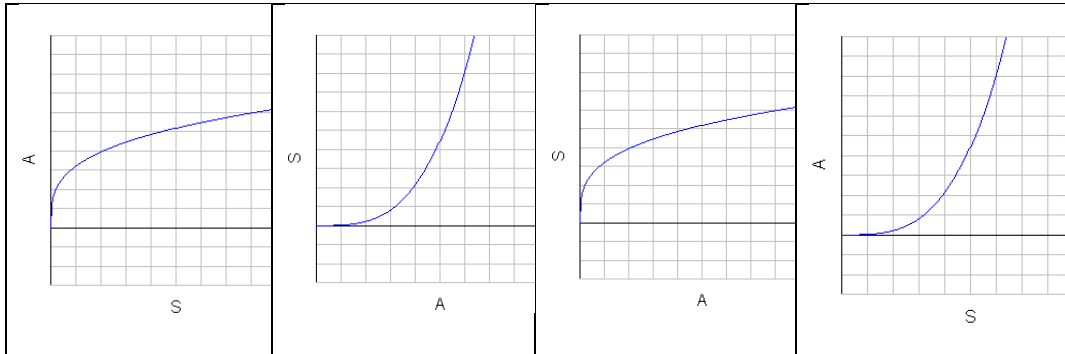
C-3 Soorten dieren

Over het aantal soorten dieren (bijvoorbeeld vissen, of reptielen) bestaan veel theorieën. In een bepaalde theorie wordt gezegd dat op een eiland in een specifieke klimaatzone het aantal soorten reptielen alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland.

We bekijken in deze opgave het aantal soorten reptielen op een eiland in het Caraïbisch gebied. Het theoretisch verband tussen het aantal soorten reptielen S en de oppervlakte A van het eiland wordt gegeven door de volgende formule: $S = 3 \cdot A^{0,30}$. Hierbij is A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijlen en S het aantal soorten reptielen dat op het eiland voorkomt.

Steeds als A 100 keer zo groot wordt dan zal S ook met een vast getal vermenigvuldigd worden.

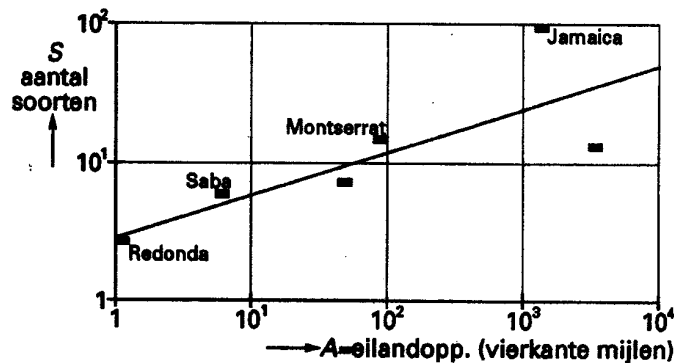
- a. Bereken dit vaste getal.
- b. Welke van de onderstaande grafiek(en) passen bij het verband tussen A en S ? Licht je antwoord toe.



In deze opgave gaan we er vanuit dat een mijl gelijk is aan 1600 meter.

- c. Bereken bij welke oppervlakte in km^2 je volgens de formule 100 soorten reptielen op het eiland mag verwachten.

De grafiek van $S = 3 \cdot A^{0,30}$ kan ook in een rooster met logaritmische schalen worden weergegeven. Zie de figuur hieronder.



- d. Bereken hoeveel soorten je op Jamaica volgens de figuur hierboven meer zult vinden dan volgens de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$. Licht je antwoord toe.

Op een groot eiland worden verschillende soorten reptielen bedreigd met uitsterven. Men wil proberen dit te voorkomen door natuurreservaten te maken. Men heeft twee opties:

- Oprichting van één groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
- Oprichting van twee kleinere natuurreservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen.

Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als 'eilanden' beschouwd worden, zodat de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt kan worden.

Voor welke van de twee opties gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten reptielen dat de twee kleinere natuurreservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het ene als in het andere kleine reservaat zullen voorkomen. Men kiest de optie, waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

e. Welke van de twee opties zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

C-4 Schoolreis

Een vijfde klas gaat op schoolreis naar Rome. Op de heenreis zullen enige dagen worden doorgebracht in Venetië, Florence of Siena. De deelnemende leerlingen mogen hierover stemmen. Iedere leerling heeft een eigen voorkeur, bijvoorbeeld: Venetië, Siena, Florence. Dit wil zeggen: eerste keuze Venetië, tweede keuze Siena en derde keuze Florence.

De voorkeuren van de 31 leerlingen zijn als volgt:

Voorkeur			Aantal leerlingen
Florence	Venetië	Siena	5
Florence	Siena	Venetië	7
Venetië	Florence	Siena	3
Venetië	Siena	Florence	7
Siena	Florence	Venetië	3
Siena	Venetië	Florence	6

Bij een stemming, waarbij iedere leerling maar één bestemming mag noemen, blijkt dat Florence met 12 stemmen wint en men besluit naar Florence te gaan.

Nu zijn er ook andere kiessystemen, bijvoorbeeld de Bordaregel. Hierbij krijgen de verschillende voorkeuren van de leerlingen elk een verschillend aantal punten. De stad die op deze manier de meeste punten krijgt is dan de winnaar.

Neem aan dat steeds de eerste voorkeur 3 punten krijgt, de nummer twee 2 punten en de nummer drie 1 punt. We noemen dit een Bordaregel met weging 3, 2, 1.

a. Bepaal volgens deze Bordaregel welke stad de winnaar is.

De Bordaregel kan ook met andere wegingen gebruikt worden. De weging 2, 1, 0 zal dezelfde winnaar opleveren als de weging 3, 2, 1. Ook de weging 1, $\frac{1}{2}$, 0 zal eenzelfde winnaar opleveren.

b. Leg dit uit.

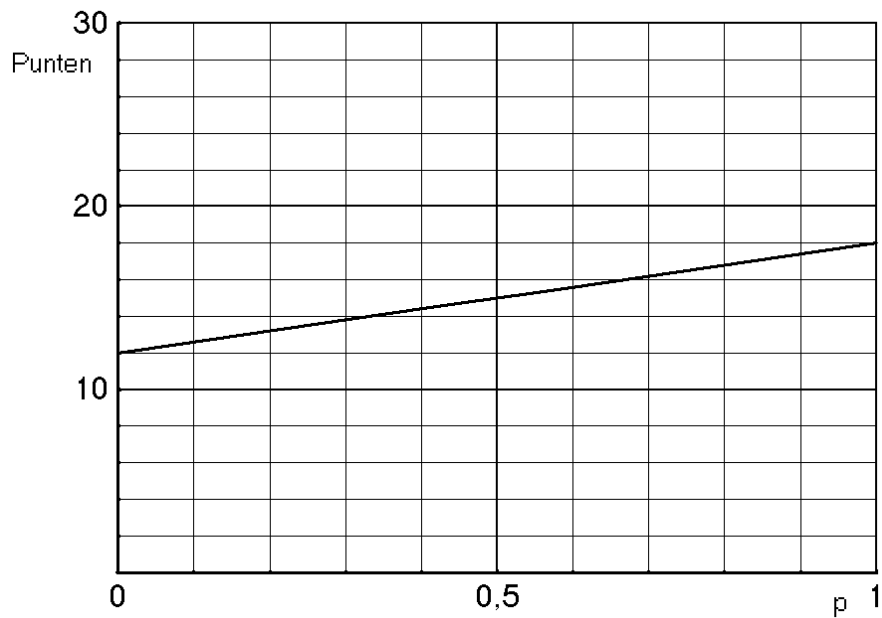
We willen onderzoeken of er andere wegingen zijn die ervoor zorgen dat we een andere winnaar krijgen. Neem als weging 1, p , 0 (met p tussen 0 en 1).

c. Toon aan dat we een andere winnaar krijgen als p redelijk klein is.

We onderzoeken nu preciezer wat de gevolgen zijn van de keuze van p . Voor iedere stad kun je een formule opstellen die het aantal punten dat de stad behaalt, uitdrukt in p . Voor Florence geldt de formule $\text{Punten} = 12 + 6p$.

Het verband dat deze formule beschrijft is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



- d.** Geef in figuur 1 hierboven ook het verband tussen p en het aantal punten weer voor de andere twee steden (Siena en Venetië) en onderzoek welke verschillende winnaars er mogelijk zijn, afhankelijk van de waarde van p .

D-1 DISK (Eindexamen wiskunde A1 vwo 2007-II, bewerking)

Een hobbycomputerclub geeft elke maand het tijdschrift DISK uit, waarop alleen eigen leden zich kunnen abonneren. Gedurende lange tijd is het aantal abonnees gelijk aan 90. Omdat de computerclub maar liefst 5400 leden telt, heeft men besloten een reclamecampagne te starten om meer leden te werven voor een abonnement op DISK. De campagne heeft succes: al na één maand zijn er 17 nieuwe abonnees, een maand later hebben zich weer nieuwe abonnees aangemeld en wel 21. Tabel 1 geeft dit verloop voor de eerste maanden weer.

tabel 1

n (maandnummer)	0	1	2	3	4
A_n (aantal nieuwe abonnees in deze maand)		17	21	25	
N_n (totale aantal abonnees na deze maand)	90	107	128	153	

De eerste drie maanden geldt voor A_n de formule: $A_n = 4n + 13$. Neem aan dat deze formule ook geldt voor alle volgende maanden.

a. Bereken het totale aantal abonnees na 6 maanden.

Met behulp van de formule voor A_n kan een formule worden opgesteld voor het totale aantal abonnees N_n . Deze formule kan geschreven worden als $N_n = 2n^2 + b \cdot n + c$.

b. Bereken b en c .

Als het totale aantal abonnees zo blijft toenemen, zal DISK op zeker moment meer dan 1000 abonnees hebben.

c. Laat zien dat er dan na 18 maanden voor het eerst meer dan 1000 abonnees zullen zijn.

D-2 Mobiel (Eindexamen vwo wiskunde A1 2006-I, bewerking)

In de jaren negentig van de twintigste eeuw hebben steeds meer mensen een mobiele telefoon aangeschaft. Om de ontwikkelingen te volgen, kijken telefoonbedrijven vooral naar het deelnamepercentage. Dat is het aantal abonnees met een mobiele telefoon in een land, uitgedrukt als percentage van het aantal inwoners van dat land.

Een benadering voor het deelnamepercentage van Nederland is de formule:

$$P_{\text{Nederland}} = \frac{81}{1 + 30 \cdot 0,49^t}$$

Hierin is $P_{\text{Nederland}}$ het deelnamepercentage van Nederland en t de tijd in jaren.

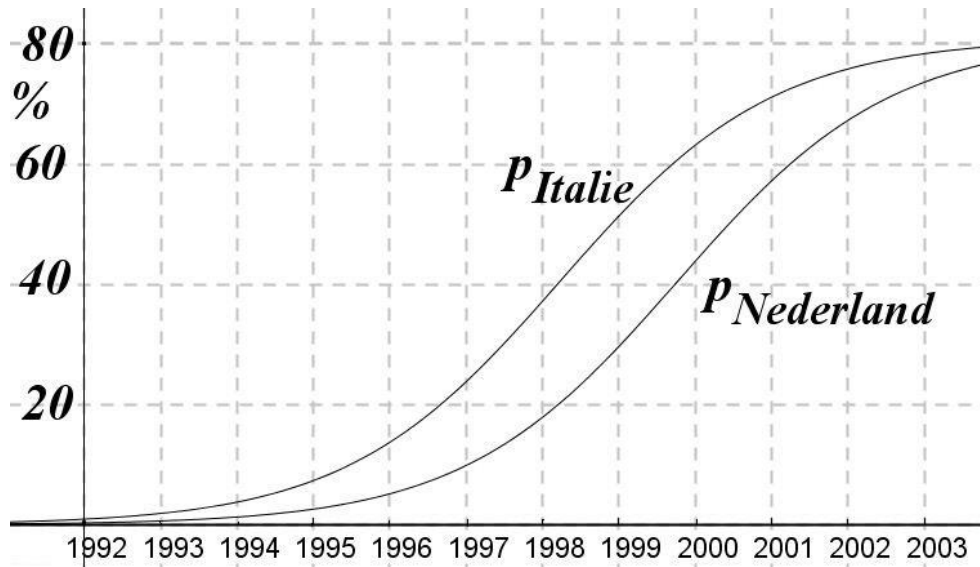
Hierbij komt $t = 0$ overeen met 1 januari 1995.

De formule van Italië is: $P_{\text{Italië}} = \frac{81}{1 + 10 \cdot 0,49^t}$

Hierin is t weer de tijd in jaren. Ook hier komt $t = 0$ overeen met 1 januari 1995.

In figuur 1 zie je de grafieken van beide formules.

figuur 1

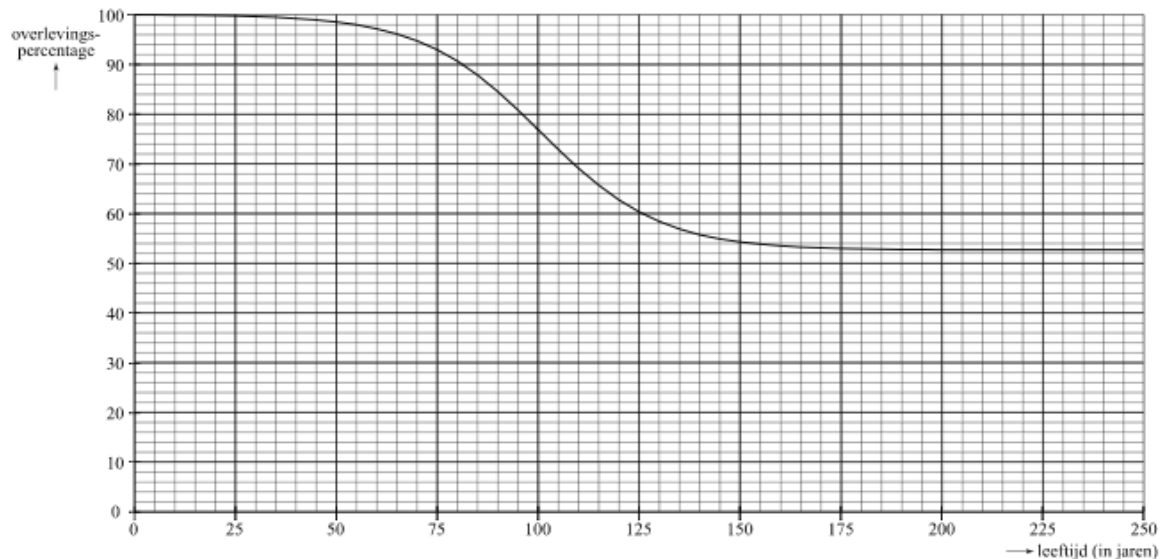


- a. Bepaal de hellingen van de grafieken van Nederland en Italië op 1 januari 1996.

Zoals je in de figuur kunt zien is het deelnemerspercentage van Italië vanaf 1994 voortdurend groter dan het deelnemerspercentage van Nederland. Het verschil in het deelnemerspercentage van Italië en dat van Nederland wordt in het begin alleen maar groter. Vanaf een zeker moment gaat Nederland zijn achterstand op Italië weer inlopen.

- b. Op welk moment is dit het geval? Geef een toelichting.

D-3 Levensduur van woningen (uit voorbeeldexamen wiskunde C pilot 2011)

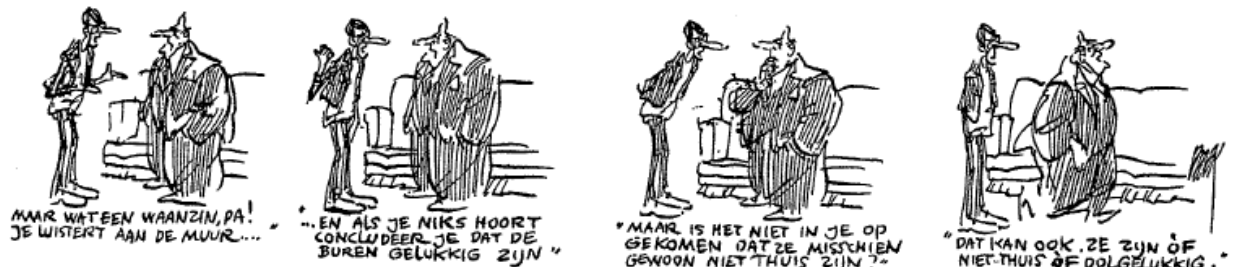


In Nederland is de levensduur van woningen wisselend. Soms werden en worden betrekkelijk nieuwe woningen gesloopt. Maar er zijn ook nu nog woningen die al eeuwen bestaan en telkens gerenoveerd worden. Door de Technische Universiteit Delft is onderzoek gedaan naar dit verschijnsel. Voor koopwoningen is het resultaat weergegeven in de figuur.

In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat in Nederland zo'n 60% van de koopwoningen een leeftijd van 125 jaar haalt. Of, een ander voorbeeld, je kunt zien dat de leeftijd van 100 jaar door zo'n 77% van deze woningen gehaald wordt. Deze percentages noemen we **overlevingspercentages**. We vragen ons af bij welke leeftijd het overlevingspercentage het sterkst daalt. Schat deze leeftijd met behulp van de figuur en bepaal hoeveel procent van de koopwoningen rond die leeftijd jaarlijks wordt gesloopt.

F-1 Zwart-wit denken is kleurloos

Hieronder zie je een strip van Vader en Zoon in vier plaatjes.



De zoon beschrijft in de eerste twee plaatjes een redenering van de vader.

- Geef deze redenering van de vader. Gebruik in deze redenering 'Als dan
- Na de opmerking van de zoon maakt de vader in het vierde plaatje een tegenstelling tussen "dorgelukkig" en "niet thuis". Leg uit waarom deze redenering niet juist is.

Stelling 1: Als de burenen geen geluid maken, dan zijn ze gelukkig.

Stelling 2: Als de burenen gelukkig zijn, dan maken ze geen geluid.

- Leg uit dat als stelling 1 waar is, dit niet automatisch betekent dat stelling 2 ook waar is.

F-2 De paradox van de krokodil

Eén van de amusantste paradoxen uit de oudheid is die van de krokodil.

- Een krokodil rukt een moeder haar baby uit handen, en zegt: "Als je zult raden wat ik ga doen, krijg je je kind terug, anders eet ik het op." Radeloos roept de moeder "O, je zult hem opeten!" "Tja", zegt de krokodil, "nu kan ik hem helaas niet teruggeven, want dan zou je verkeerd geraden hebben en moet ik hem dus wel opeten." "Nee", zegt de moeder, die nu weer tot bezinning komt, "want als je mijn kind opeet, heb ik juist geraden, en moet je het dus teruggeven!"
- "Kijk", zegt de krokodil, "ik begrijp dat je een beetje van slag bent, maar dit is wel zo'n beetje het stomste antwoord dat je had kunnen geven. Ik ben namelijk een man van eer, en hecht er erg aan me te allen tijde aan mijn woord te houden."

Leg uit waarom in de regels 1 t/m 6 sprake is van een paradox.

F-3 Roken

Een veelgemaakte redenering is de volgende:

90 % van de longkanker patiënten heeft gerookt.

Dus: als je rookt, dan is de kans op longkanker 90%.

Laat met een Venn-diagram zien dat deze omdraaiing niet zomaar is toegestaan.

F-4 Ouderavond

Rosanne heeft een nieuwe smartphone nodig en onderhandelt met haar vader over zijn bijdrage aan een nieuw abonnement. Zij vindt 15 euro per maand als bijdrage van haar vader redelijk (D) want:

- Alle medeleerlingen uit haar klas krijgen minstens 15 euro per maand van hun ouders. (A)
- Abonnementen zijn vaak duurder zodat zij zelf nog moet bijdragen. (B)
- Ook ouders hebben er belang bij dat hun kinderen telefonisch bereikbaar zijn. (C)

- a. Leg uit in hoeverre de drie argumenten van Rosanne (A,B,C) passen bij haar eis van 15 euro per maand.

Om te analyseren wat de vader logisch gezien moet doen, kan hij kijken naar twee modellen:

$$(1) \quad A \wedge B \wedge C \Rightarrow D \qquad \text{en} \qquad (2) \quad A \vee B \vee C \Rightarrow D$$

Op een ouderavond blijkt dat enkele medeleerlingen maar 12 euro per maand bijdrage van hun ouders krijgen.

- b. Ga voor beide modellen na wat de vader zou moeten concluderen naar aanleiding van de informatie van de ouderavond met betrekking tot zijn bijdrage.

F-5 Anneke

Als Anneke intelligent is en hard studeert, dan haalt zij goede cijfers. Als ze goede cijfers haalt zal ze het diploma halen. Als Anneke hard studeert maar niet intelligent is, dan zal men waardering hebben voor haar inzet. Als haar inzet gewaardeerd wordt zal zij het diploma halen. Als Anneke intelligent is, dan studeert ze hard.

We gebruiken de volgende afkortingen:

I = Anneke is intelligent;

S = Anneke studeert hard;

G = Anneke haalt goede cijfers;

D = Anneke haalt diploma;

W = Anneke wordt gewaardeerd.

De redeneerstap in de eerste zin kan als volgt genoteerd worden: $I \wedge S \Rightarrow G$

- a. Noteer op dezelfde wijze als hierboven, de redeneerstappen in de andere zinnen.

Neem aan dat Anneke intelligent is.

- b. Leg, op basis van deze uitspraken, uit of je kunt concluderen dat Anneke het diploma haalt.

Stel dat we weten dat Anneke niet slaagt.

- c. Wat is nu, op basis van de gegevens, te concluderen over haar intelligentie en haar studeren?

F-6 Kunst is links

Een rechtse politicus leest in een interview de stelling: "Als je van kunst houdt, dan moet je wel links zijn".

Hij weerspreekt deze uitspraak, immers hij is zelf kunstliefhebber en noemt zichzelf niet links. Hij herformuleert de stelling tot: "Kunstliefhebbers zijn niet links".

Leg uit waarom deze laatste bewering niet correct hoeft te zijn.

F-7 Dalende grafiek

In een wiskunde examen staat de volgende opgave:

Onderzoek of de grafiek van $y = \frac{1200}{5 + 2 \cdot 3^{-x}} + 0,0009x^4 - 30x^2$ dalend is. Dit betekent dat bij grotere x -waarden altijd kleinere y -waarden horen.

Een leerling geeft het volgende antwoord: Ik bereken de y -waarden bij $x=3$, $x=13$ en $x=23$ en zie dat de y -waarden steeds kleiner worden; dus de grafiek is dalend.
Leg uit waarom dit antwoord fout gerekend moet worden.

G-1 Het holocaust monument in Berlijn

Het holocaust monument, gebouwd op een stuk grond vlakbij de *Reichstag* en de *Brandenburger Tor*, heet officieel *Denkmal für die ermordeten Juden Europas*. Het is in 2005 geopend en kostte 14 miljoen euro. Het monument, ontworpen door de architect Peter Eisenman, bestaat ongeveer 19.000 vierkante meter, de grootte van bijna vier voetbalvelden. Het bestaat uit 2711 donkergrijze, betonnen blokken van gelijke lengte en breedte (0,95 meter bij 2,375 meter), maar variërend in hoogte (van 20 cm tot 4,5 meter). De blokken zijn in rechte lijnen geplaatst, op gelijke afstand van elkaar (0,95 meter), op een golvende bodem die naar het midden toe afloopt. De blokken worden in de volksmond 'stelae' genoemd, wat te vertalen is met 'zerken', steenachtige, naar de hemel wijzende gedenktekens voor de doden. Jaarlijks trekt het monument zo'n drie miljoen bezoekers; het is elk moment van de dag voor het publiek geopend.



- a. Laat met een berekening zien dat de gegevens over de afstand tussen twee blokken, de oppervlakte van het terrein en de afmetingen van de blokken ongeveer met elkaar kloppen. (Dat het niet helemaal klopt komt door de onregelmatigheden aan de kanten; zie de foto.)

De betonnen blokken zijn voorzien van een antigraffiti laag. Deze speciale verflaag is aan vijf kanten aangebracht: de onderkant hoeft niet behandeld te worden.

- b. Er wordt beweerd dat je voor het hoogste blok bijna 9 keer zo veel verf nodig hebt als voor het kleinste blok. Ga met een berekening na of dit klopt.

G-2 Duccio

Beeldende kunstenaars uit de tijd van de Renaissance beginnen losse eigenschappen van perspectief te ontdekken. De idee dat in de afbeelding iets gedaan moet worden met wijkende lijnen begint op te komen, maar het is nog geen samenhangend geheel. In de afbeelding hieronder is te zien dat de kunstenaar Duccio (1255-1319) pogingen doet om "diepte" in zijn schilderij weer te geven. Als we ervan uitgaan dat de persoon rechts zich in een ruimte bevindt waarin alle wanden in werkelijkheid loodrecht op elkaar staan, dan zijn er in de tekening een aantal aanwijzingen te vinden waaruit blijkt dat de kunstenaar regels voor perspectief niet consequent gebruikt.

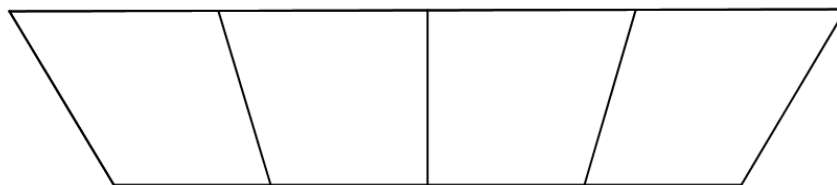
- a. Geef in de afbeelding hieronder twee voorbeelden waaruit blijkt dat de kunstenaar Duccio regels voor perspectief niet juist heeft gebruikt. Geef een toelichting bij de voorbeelden.



Een van de 75 panelen over het leven van Jezus en Maria die Duccio di Buoninsegna (1255-1319) gemaakt heeft voor de kathedraal van Siena.

Ga ervan uit dat het plafond is opgebouwd uit 12 even grote vierkante vlakken. In de tekening hieronder is alleen de middelste rij vierkanten getekend. De dikte van de balken worden in de tekening als lijnen weergegeven.

b. Maak de perspectieftekening van het plafond af.



G-3 Jan Dibbets⁴

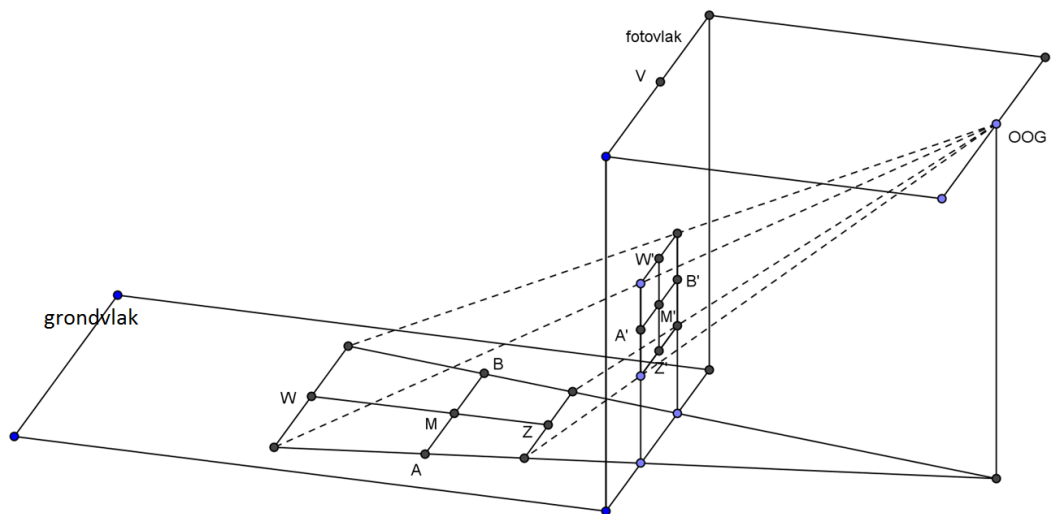
Jan Dibbets (Weert, 9 mei 1941) is een internationaal bekend beeldend kunstenaar. Hij is onder meer bekend geworden met zijn 'perspectivische correcties'. Daarin maakte hij met behulp van fotografie aanpassingen in de waarneming van simpele vormen, die hij tekende op vloeren, muren of uitzette in het gras of zand. De foto hieronder is daarvan een voorbeeld.

Dibbets plakte met tape een trapezium op een plankenvloer in een lege rechthoekige kamer. (Een trapezium is een vierhoek waarvan minstens twee tegenoverliggende zijden evenwijdig zijn.) Van tevoren had hij bepaald welke positie hij met de camera moest innemen om het trapezium, vanwege het perspectief, waar te nemen als een (rechtopstaand) vierkant.



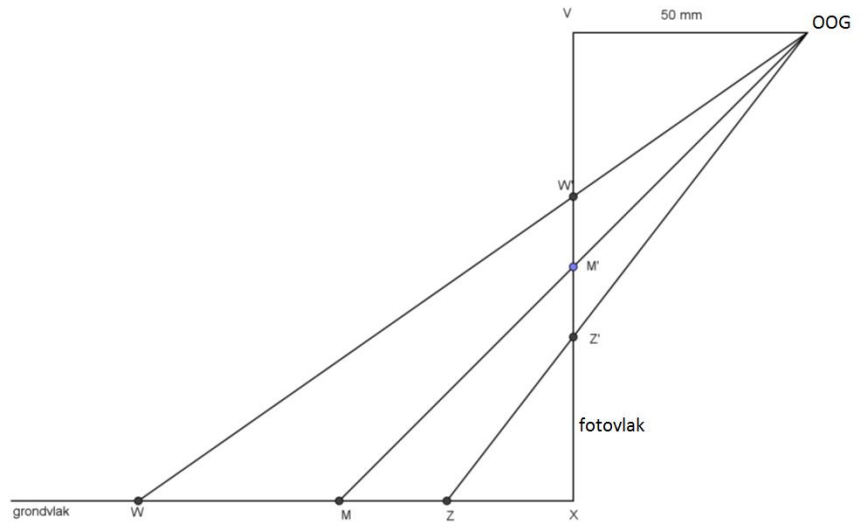
- Teken op de foto het verdwijnpunt en de horizon.
- Op welke hoogte vanaf de grond bevond zich de lens van het fototoestel ongeveer op het moment dat de foto werd gemaakt? Geef uitleg hoe je aan je schatting bent gekomen op grond van de foto.

Dibbets heeft flink wat werk gehad om precies een vierkant op de foto te krijgen. De tekening hieronder is een, op schaal getekend, zijaanzicht van bovenstaande situatie. In de figuur geeft het oog het standpunt van de camera weer. Het trapezium in het grondvlak (met de punten W en Z als middens van de twee evenwijdige zijden en A en B als middens van de twee andere zijden) geeft een vierkant in de foto (met de punten W' , A' , Z' en B' als middens van de zijden). V is het verdwijnpunt in het vlak van de foto.



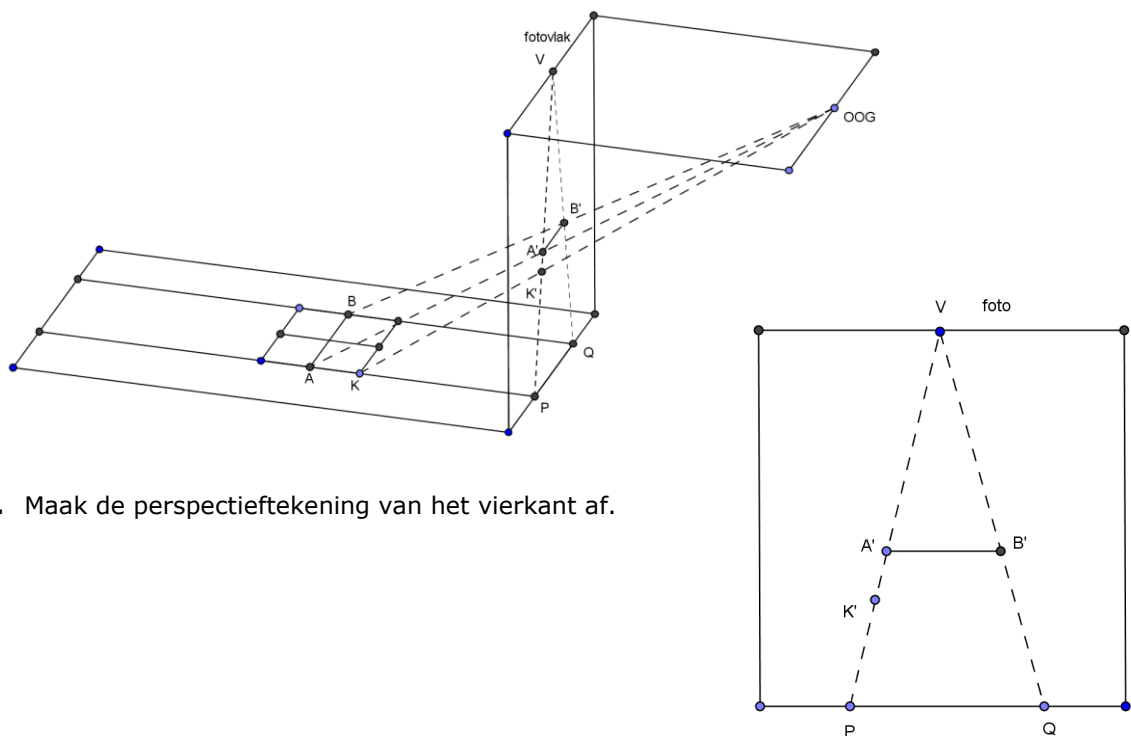
⁴ De opgave is aangepast omdat de eerdere versie van deze opgave niet van de leerlingen gevraagd kon worden op grond van de syllabus.

De tekening hiernaast is een zijaanzicht van bovenstaande situatie. In die tekening is punt M' is het midden van het vierkant, zoals dat op de foto te zien is. De hoogte van het vierkant op de foto, dus de lengte van $W'Z'$, is 30 mm. Van het verdwijnpunt V wordt een lijn loodrecht op het grondvlak getekend. Het snijpunt van deze lijn met het grondvlak noemen we X . De afstand van het verdwijnpunt V tot het punt X is 100 mm en de afstand van het oog tot het verdwijnpunt is 50 mm. Het vierkant ligt zodanig in het vlak van de foto dat de lengte van VW' gelijk is aan die van XZ' .



c. Bereken met verhoudingen de lengte van WZ in het grondvlak.

In een voorstudie voor zijn foto zou Dibbets geëxperimenteerd kunnen hebben met een vierkant op het grondvlak (met punten A en B op de zijden en een hoekpunt K) om te zien wat dit als resultaat geeft op de foto. Deze situatie is in onderstaande figuur aangegeven. Je ziet in de schets links de punten A' en B' en K' (als beeldpunten van A, B en K) in het vlak van de foto en op de foto rechts (dit is het vlak van de foto van voren gezien). Op de foto zal het vierkant in perspectief zichtbaar zijn.



d. Maak de perspectieftekening van het vierkant af.

G-4 Etagère (Eindexamen wiskunde B1,2 HAVO 2004-II, bewerking)

In een advertentie van een tuincentrum staat een foto van een etagère. Dezelfde foto is hieronder afgebeeld. In figuur 1 is de etagère getekend.

De etagère is opgebouwd uit drie gelijke piramiden. Elke piramide is gemaakt van vier driehoeken van blik die aan elkaar gelast zijn.

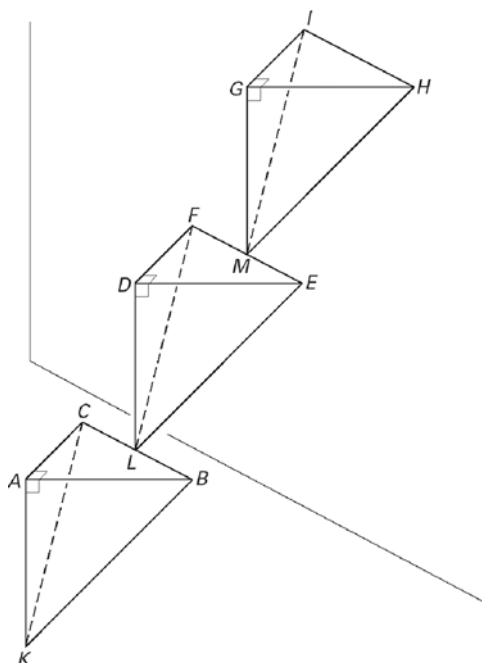
De etagère steunt met het punt K op de grond en met de ribbe HI tegen de muur. De bovenste piramide is aan de middelste vastgelast in het midden M van ribbe EF en de middelste piramide is aan de onderste vastgelast in het midden L van ribbe BC .

Het punt K en de ribben BC , EF en HI liggen in één vlak.

foto



figuur 1



De driehoeken KAB , KAC en ABC zijn zowel rechthoekig als gelijkbenig.

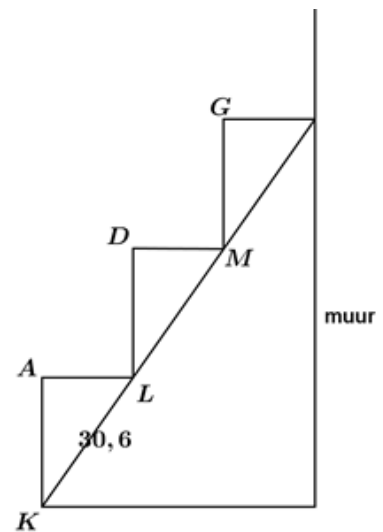
$KA = AB = AC = 25$ cm.

De plateaus ABC , DEF en GHI lopen evenwijdig aan het grondvlak.

- a. Teken een bovenaanzicht van de etagère uit figuur 1 op schaal 1:5.

In de figuur hiernaast is een zijaanzicht getekend van de etagère. De afstand van K naar L is 30,6 cm.

- b.** Bereken van de etagère de afstand van K tot de muur. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.



Een doe-het-zelver wil de etagère namaken.

Hij besluit echter om de plateaus ABC, DEF en GHI weg te laten zodat hij de drie piramiden kan vullen met aarde om er plantjes in te kunnen zetten.

- c.** Laat met een berekening zien dat de totale inhoud van de piramiden $7812,5 \text{ cm}^3$ is.

G-5 Het Prisma van Sanherib

Het Prisma van Sanherib is de benaming van een prisma van klei, die op de zes zijden een Akkadische historische tekst draagt, daterend uit de regering van de Assyrische koning Sanherib.

Het grondvlak is een regelmatige zeshoek. De hoogte is 38 cm en de totale breedte, gemeten van hoekpunt naar hoekpunt, is 14 cm. De oppervlakte van de zeshoek is ongeveer 127 cm^2 .

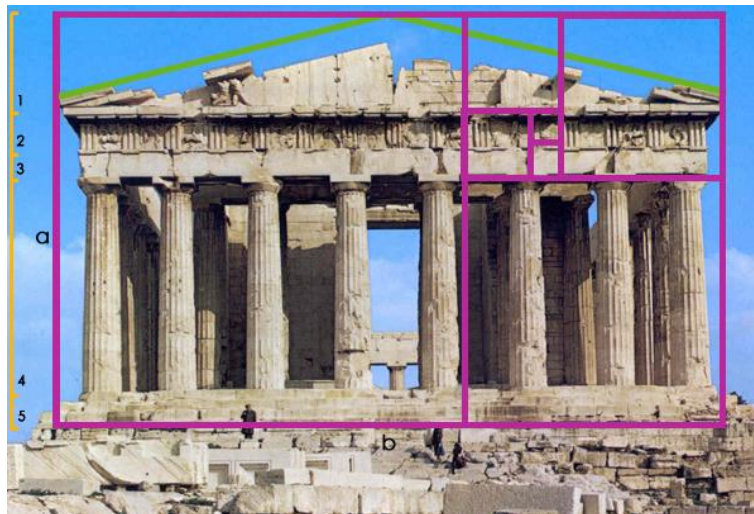
- a.** Bereken de oppervlakte van de zeshoek in twee decimalen nauwkeurig.
- b.** Bereken de inhoud van het prisma van Sanherib in cm^3 nauwkeurig.



G-6 Parthenon

Er wordt vaak beweerd dat de verhouding van de gulden snede gebruikt is bij het ontwerp van het Parthenon, een bekende Griekse tempel op de Acropolis in Athene. Het gebouw is nu een ruïne, maar vroeger was de bovenkant van het gebouw nog wat hoger. Dat kun je aan de zijanten nog zien. De schuine lijnen geven aan hoe het gebouw er vroeger uitzag. Als je een rechthoek om de contouren van het gebouw tekent, krijg je een **Gulden Rechthoek**. Dat betekent dat de verhouding van de hoogte en de breedte van het gebouw gelijk is aan de gulden snede.

foto

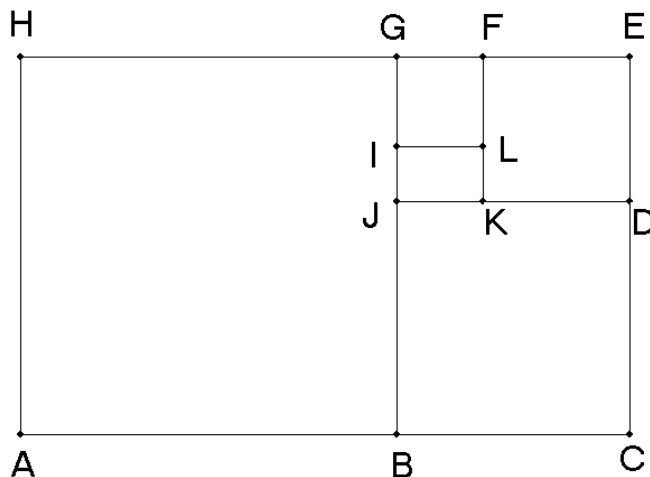


Het bijzondere van de Gulden Rechthoek is dat na het weghalen van een perfect vierkant uit de Gulden Rechthoek, de overblijvende rechthoek weer een Gulden Rechthoek is.

- Meet de zijden van de grootste in de foto getekende rechthoek op en laat door een berekening zien dat deze inderdaad een gulden snede verhouding kan hebben.
- Geef een voor- en een tegenargument voor de bewering dat de gulden snede verhouding bewust gebruikt kan zijn voor het ontwerp van het Parthenon.

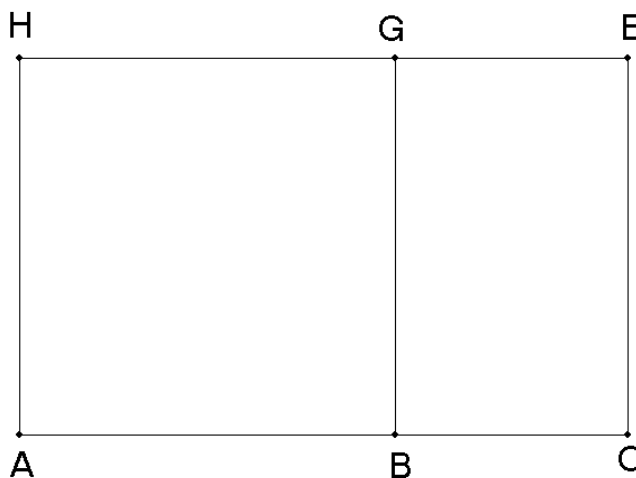
We bekijken in de rest van de opgave onderstaande figuur 1. Deze figuur zie je ook afgebeeld op de foto. In de figuur is ACEH de in de tekst bedoelde Gulden Rechthoek.

figuur 1



De Gulden Rechthoek ACEH zie je hieronder in figuur 2 nogmaals weergegeven.

figuur 2



- c.** Geef in figuur 2 aan hoe hieruit figuur 1 kan ontstaan door een aantal extra lijnstukken te tekenen. Licht je werkwijze toe en geef aan in welke volgorde je de extra lijnstukken tekent.

De verhouding van de gulden snede zie je in figuur 1 terug in de verhouding van de lengtes van AC en AH en in de verhouding van de lengtes van JK en IJ. Ook zie je deze verhouding in de verdeling van sommige lijnstukken. Zo wordt het lijnstuk AC verdeeld in lijnstuk AB en lijnstuk BC. De verhouding van de lengtes van AB en BC is gelijk aan de gulden snede.

Ook bij de verdeling van andere lijnstukken zie je de gulden snede terug.

- d.** Geef drie lijnstukken uit figuur 1, met de verdeling, die verdeeld worden volgens de gulden snede.

De rechthoek IJKL in figuur 1 is een Gulden Rechthoek. We kiezen de afmetingen in deze rechthoek als volgt: $IJ=1$ en $JK = \varphi$ ($\approx 1,618\dots$).

Op basis hiervan kunnen de lengtes van AC en AH worden uitgedrukt in φ .

e. Druk de lengtes van AC en AH uit in φ .

Uitwerkingen voorbeeldopgaven

B1-1 Verdienen vrouwen minder?

a. $\frac{14,2 - 10,2}{10,2} \cdot 100\% \approx 39\%$

b. 1990: $\frac{10200}{50} \cdot 100 \text{ euro} = 20400 \text{ euro} .$

2000: $\frac{14200}{53} \cdot 100 \text{ euro} = 26792,45 \text{ euro} .$

Toename: $\frac{26792,45 - 20400}{20400} \cdot 100\% \approx 31\% .$

Deze 31% is minder dan 39%

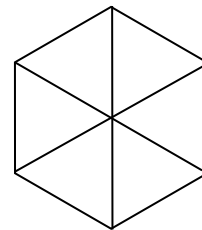
- c. Absoluut neemt het verschil in uurloon toe: van 3,23 euro tot 3,68 euro.
 Relatief neemt het verschil in uurloon af: van 72,88% tot 78,33%.

B2-1 Sol LeWitt

a. $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15 .$

b. $\binom{6}{4} = 15 .$

- c. Onder een bepaalde hoek gezien geeft een perspectiefisch aanzicht van een draadkubus een zeshoek te zien (zie afbeelding hiernaast). De plaatjes van LeWitt geven allen incomplete versies van deze zeshoek te zien.
 Opbouw: het aanzicht van een volledige draadkubus heeft 12 lijnstukjes. LeWitt heeft zijn variaties geordend op aantal lijnstukjes, van boven (3) naar beneden (11).



d. $\binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \dots + \binom{12}{11} = 4016 .$

C-1 Tandarts

a. $2,5 \cdot 0,1^t = 0,3$ geeft $t \approx 0,92$ uur ofwel 55 minuten.

b. $0,3 = V \cdot 0,1^t = V \cdot 0,1^{\frac{1}{60}d} = V \cdot (0,1^{\frac{1}{60}})^d \approx V \cdot 0,962^d .$

c. $0,3 = 10 \cdot 0,962^d$ geeft $d \approx 90$ en $0,3 = V \cdot 0,962^{60}$ geeft $V \approx 3 .$

d. $0,3 = V \cdot 0,962^d .$

$$V = \frac{0,3}{0,962^d} = 0,3 \cdot 0,962^{-d} (\approx 0,3 \cdot 1,04^d) .$$

e. $0,962^d = \frac{0,3}{V}$.

$$d = \frac{\log\left(\frac{0,3}{V}\right)}{\log 0,962} \left(= \frac{\log 0,3 - \log V}{\log 0,962} \approx \frac{-0,523 - \log V}{-0,017} = \frac{0,523 + \log V}{0,017} = \dots \right).$$

C-2 Aandeel

a. Bijvoorbeeld als volgt:

Teken een verticaal lijnstuk vanaf de horizontale as bij 1980 omhoog naar de grafiek. Teken het snijpunt, en teken vanaf dit snijpunt een horizontaal lijnstuk richting de verticale as. Geef het snijpunt aan, en meet de hoogte van dit snijpunt langs de verticale as vanaf de aangegeven waarde 10 000 (= 10^4). Dit is (ongeveer) 31 mm. De stapgrootte op de verticale as is 17,5 mm. Dan hoort bij 31

mm de waarde $10^{\frac{31}{17,5}+4} \approx 590000$ euro.

b. In 67 jaar is de groeifactor $\frac{10000000}{10000} = 1000$, dus de groeifactor per jaar is

$$g = 1000^{\frac{1}{67}} \approx 1,109. \text{ Dat is een groei van (ongeveer) 11\% per jaar.}$$

c. $1,109^T = 2$ geeft $T \approx 6,7$ jaar ($g = 1,09$ geeft een verdubbelingstijd van ongeveer 8 jaar).

C-3 Soorten dieren

a. $100^{0,30} \approx 4$

b. De grafieken van figuur 3 (plot de gegeven formule op de GR) en figuur 4 (de omgekeerde van figuur 3, door spiegeling in de lijn $S = A$ in te zien) passen beide.

c. $S = 100$ geeft $A \approx 119196$ vierkante mijlen, dat is ongeveer 300 000 km².

d. Aflezen in de figuur geeft voor Jamaica $S \approx 100$ en $A = 10^{3+\frac{0,25}{1,85}} \approx 1365$ vierkante mijlen. De formule geeft dan $S = 3 \cdot A^{0,30} \approx 26$ dus 26 soorten. De figuur geeft er 74 meer.

e. Optie 1: $A = 400$ geeft $S \approx 18$ dus 18 soorten;

Optie 2: $A = 200$ geeft $S \approx 15$ dus $15 + 15 - 8 = 22$ soorten; men zal optie 2 kiezen.

C-4 Schoolreis

a. Florence: $12 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = 61$ punten.

Venetië: $10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 62$ punten.

Siena: $9 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 63$ punten en de winnaar.

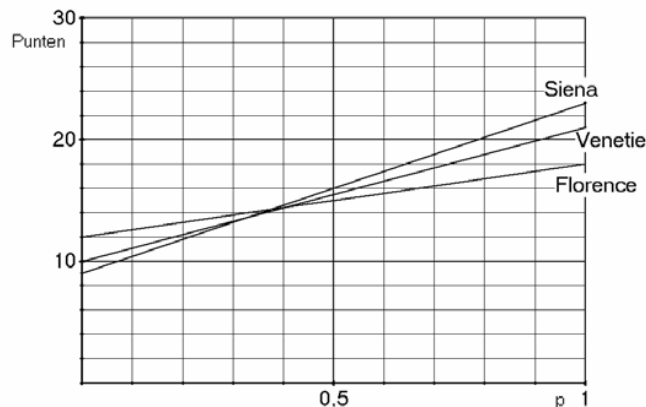
b. Als de eerste, de tweede en de derde voorkeur elk met één punt zakt, zullen de totaalscores alledrie evenveel zakken en de volgorde dus gelijk blijven. Als de eerste, de tweede en de derde voorkeur elk in punten halveren, zullen ook de totaalscores halveren en dus zal dan de volgorde gelijk blijven.

(NB: alles narekenen met de nieuwe weging is omslachtig maar wel acceptabel).

c. Dan heeft Florence $12 + 6p$ punten, Venetië $10 + 11p$ punten en Siena $9 + 14p$ punten. Bij kleine waarden van p zal het deel met de p relatief minder zwaar wegen, en de 12 zwaarder.

Bijvoorbeeld: narekenen met $p = 0,1$ geeft Florence als winnaar.

- d. (Florence: lijn door de punten (0, 12) en (1, 18); Venetië: lijn door de punten (0, 10) en (1, 21); Siena: lijn door de punten (0, 9) en (1, 23)).



Alleen de lijnen van Florence en Siena snijden. Berekenen van het snijpunt geeft: Florence wint als $p < 0,375$, Siena als $p > 0,375$ (aflezen geeft een p -waarde tussen 0,35 en 0,4), Venetië kan nooit winnaar worden!

D-1 Disk

- De aantallen nieuwe abonnees in de maanden 4, 5 en 6 zijn 29, 33 en 39. Het totale aantal abonnees na maand 6 is 252.
- Neem $n=0$: $N_0=90$ en $N_0=c$, dus $c=90$.
 Neem $n=1$: $N_1=107$ en $N_1=2+b+90$, dus $b=15$.
- Met de gevonden formule moet worden aangetoond dat $N_{17} < 1000$ en $N_{18} > 1000$
 $N_{17}=923$ en $N_{18}=1008$.
 (andere oplossingsmethoden zijn ook mogelijk)

D-2 Mobiel

- 1 januari 1996 is $t=1$.
 Beschrijven hoe de hellingen van Nederland en Italië in 1996 bepaald kunnen worden met de GR.
 Antwoord Nederland: 1 jan. 1996: 3,46. Antwoord Italië: 1 jan.1996: 8,13.
- In het begin is de helling van de grafiek van Italië groter dan die van Nederland, dan komt er een periode dat het wisselt. Vanaf 1999 is de helling van beide grafieken ongeveer gelijk. Daarna neemt de helling van de grafiek van Nederland toe t.o.v. de helling van de grafiek van Italië.
 of
 Meet de verticale afstand tussen de grafieken van Nederland en Italië. Vanaf 1999 wordt deze afstand alleen maar groter.

D-3 Levensduur van woningen

De sterkste daling is bij de leeftijd van ongeveer 100 jaar (met een afleesmarge van 10 jaar).
 Het aflezen van de percentages op een recht gedeelte van de grafiek bij 100 jaar of met behulp van de helling van de grafiek bij 100 jaar (in beide gevallen met een afleesmarge van 1%).
 Het percentage daalt 4% in 5 jaar tijd (of, bijvoorbeeld, 8% in 10 jaar tijd).
 Er wordt 0,8% per jaar gesloopt.

F-1 Zwart-wit denken is kleurloos

- a. 'Als je niks hoort, dan zijn de burens gelukkig.'
- b. 'dolgelukkig' en 'niet thuis' sluiten elkaar niet uit (de burens kunnen best tegelijkertijd dolgelukkig en niet thuis zijn).
- c. Een uitleg als: "De ontkenning van stelling 1 luidt: 'als de burens niet gelukkig zijn, dan maken ze niet geen geluid'. Ofwel: 'als de burens niet gelukkig zijn, dan maken ze geluid'. Dit is niet gelijkwaardig met stelling 2."

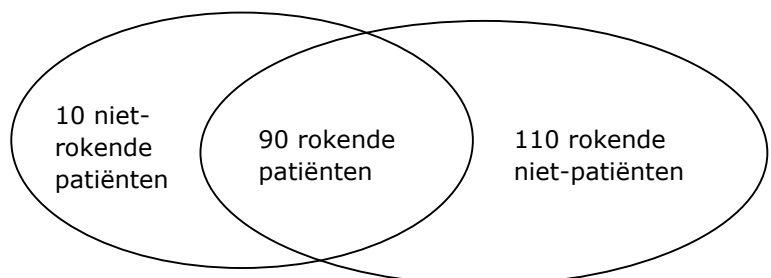
F-2 De paradox van de krokodil

De paradox zit in het feit dat beide acties (opeten en teruggeven) niet tegelijk kunnen voorkomen en dat daarmee een patstelling is ontstaan.

F-3 Roken

Beschouw patiënten en rokers als aparte groepen met een doorsnede 'rokende patiënten'.

Een mogelijke situatie is de volgende:



Nu heeft inderdaad 90% van de patiënten gerookt (namelijk 10 van de 100), maar van de rokers is zeker geen 90% patiënt (namelijk 90 van de 200).

F-4 Ouderavond

- a. A is direct gekoppeld aan haar eis van 15 euro, dus bruikbaar. Dat geldt niet voor B en C want dit zijn argumenten die niet noodzakelijk voor de genoemde 15 euro.
- b. model (1): A is nu niet waar, dus conclusie D ook niet.
model (2): B en C zijn waar, dus conclusie D ook.

F-5 Anneke

- a. Achtereenvolgens:

$$(I \wedge S \Rightarrow G)$$

$$G \Rightarrow D$$

$$S \wedge (\neg I) \Rightarrow W$$

$$W \Rightarrow D$$

$$I \Rightarrow S$$

- b. Ja, uit de laatste uitspraak volgt dat als Anneke intelligent is dat ze hard studeert. Op grond van de eerste uitspraak volgt hieruit dat ze goede cijfers haalt en dus op grond van de tweede uitspraak het diploma haalt.
- c. Op basis van eerste zin: uit 'geen goede cijfers' volgt dat ze niet intelligent is of niet hard studeert.
Op basis van zin 3 en 4: uit 'geen diploma volgt' geen waardering hetgeen impliceert 'niet hard studeren' of 'intelligent zijn'. Dus als Anneke niet intelligent is en niet hard studeert haalt ze het diploma niet
of
Als Anneke intelligent is dan haalt ze het diploma. Ze haalt ook het diploma als ze niet intelligent is en hard werkt. Dus de enige mogelijkheid om geen diploma te halen is als ze niet intelligent is en niet hard studeert. Hier zegt het stukje niets over. Dus als gegeven is dat ze niet het diploma haalt is dit de enige mogelijkheid.

F-6 Kunst is links

Er is minstens 1 niet-linkse kunstliefhebber, maar er kunnen ook linkse kunstliefhebbers zijn. Dus de bewering 'Kunstliefhebbers zijn niet links' hoeft niet juist te zijn.

F-7 Dalende grafiek

Er moet aangetoond worden dat altijd als de x -waarden toenemen de y -waarden afnemen. Deze leerling heeft slechts drie getallenvoorbeelden waarbij dit geldt. Dit is dus nog geen algemene geldigheid van het overal dalend zijn van de grafiek.
of

Een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat de grafiek niet overal dalend is.

G-1 Het Holocaust monument in Berlijn

a. Breedte: $2,375 + 0,95 = 3,325$ meter, dus 30 blokken in 100 meter.
Lengte: $0,95 + 0,95 = 1,90$ meter, dus 100 blokken in 190 meter.
Dan is de oppervlakte inderdaad ongeveer $19\,000\text{ m}^2$ (en zijn er ongeveer 3000 blokken).

b. Kleinste blok: 2,375 bij 0,95 bij 0,20 geeft $3,6\text{ m}^2$ verf.
Grootste blok: 2,375 bij 0,95 bij 4,5 geeft $32,2\text{ m}^2$ verf.

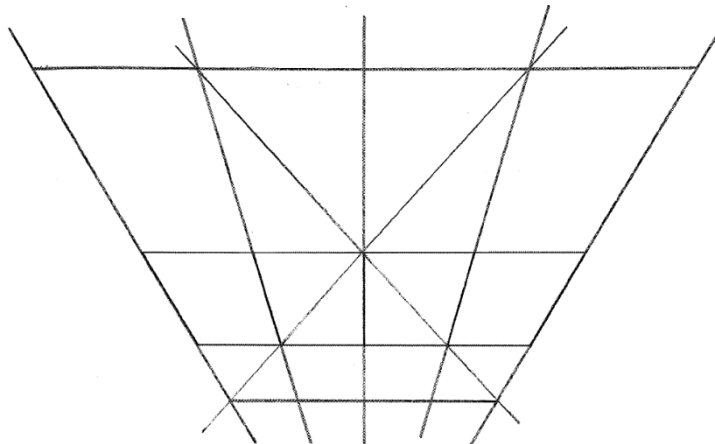
$$\frac{32,2}{3,6} \approx 9 \text{ dus het klopt.}$$

G-2 Duccio

a. De plafondbalken en het deksel van de kist waar de persoon rechts op zit hebben niet allebei hetzelfde verdwijnpunt (het ene ligt 'naar achteren' en het andere 'naar voren').

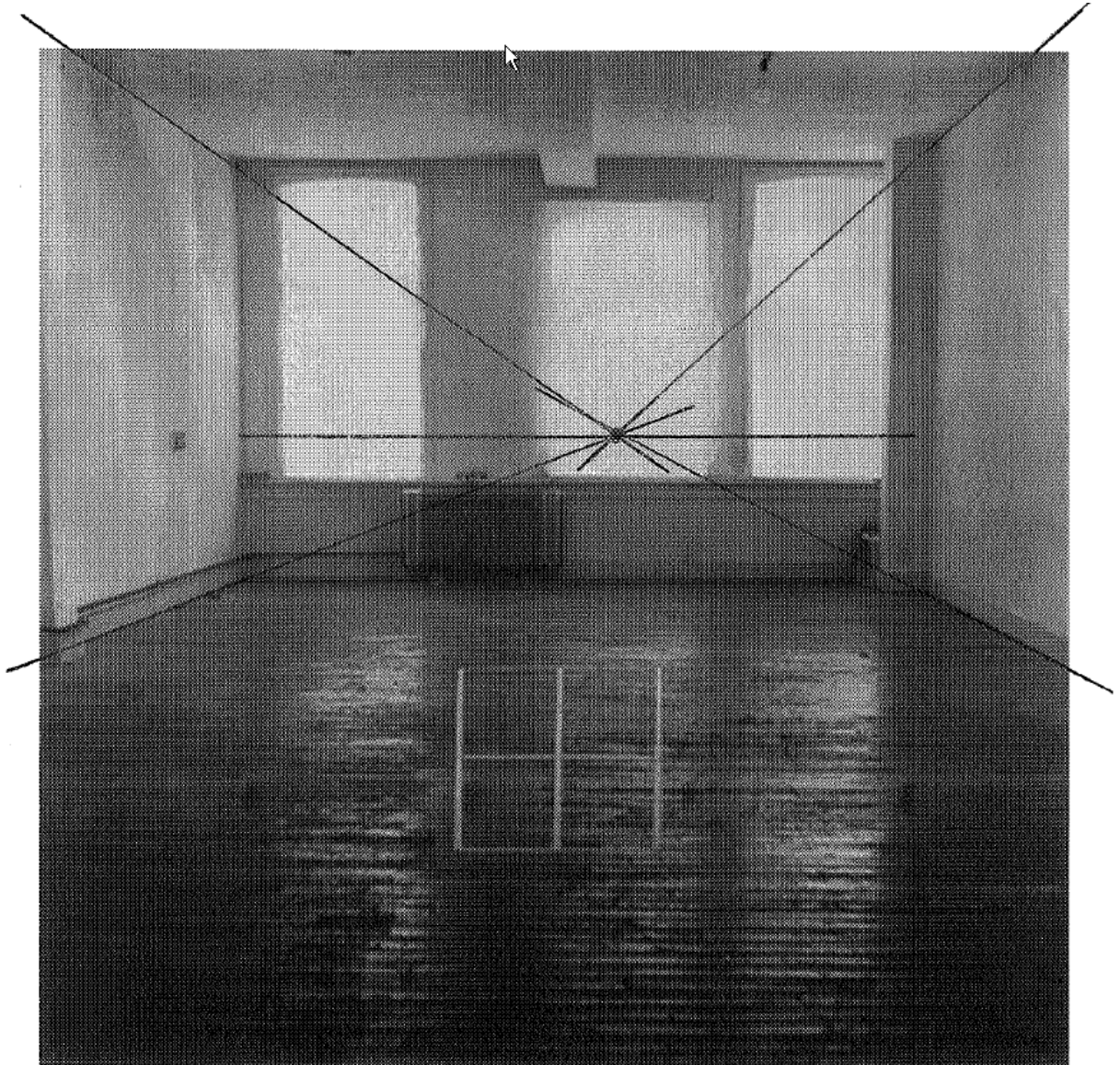
De lessenaar waarop het boek ligt (en ook het boek zelf) kent twee maal twee evenwijdige zijden, en is dus feitelijk niet in perspectief (zonder verdwijnpunt) getekend.

b.



G-3 Jan Dibbets

a.



- b.** Het verdwijnpunt zit in de tekening ongeveer 2,1 cm boven de vloer (gemeten op de wand met de ramen). De vensterbank zit in de tekening op ongeveer 1,4 cm hoogte, dat komt in werkelijkheid overeen met (naar schatting) 80 cm. Dan bevond de lens zich op (ongeveer) $\frac{2,1}{1,4} \cdot 80 = 120$ cm boven de grond.

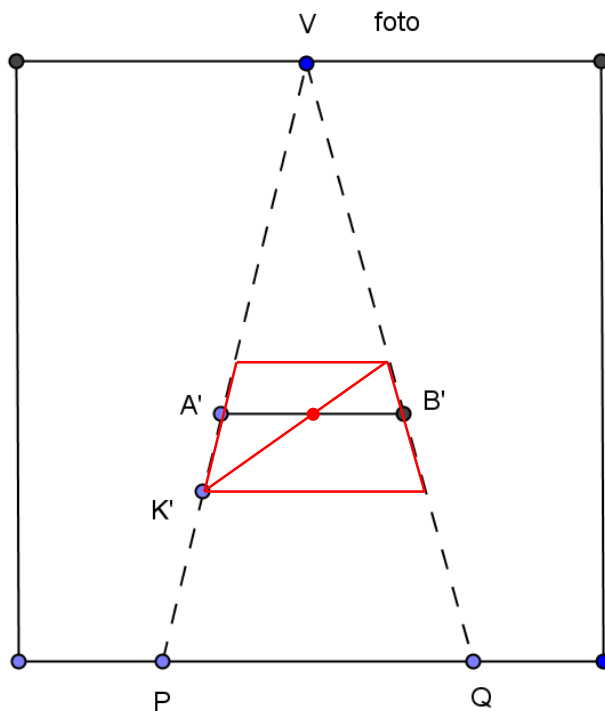
c. Er geldt: $W'Z' = 30$ en
$$VW' = XZ' = \frac{100-30}{2} = 35$$

Dan: $\frac{XZ}{XZ'} = \frac{VO}{VZ'}$ geeft $\frac{XZ}{35} = \frac{50}{65}$ dus $XZ = \frac{50 \cdot 35}{65} \approx 27$

Verder: $\frac{XW}{XW'} = \frac{VO}{VW'}$ geeft $\frac{XW}{65} = \frac{50}{35}$ dus $XW = \frac{50 \cdot 65}{35} \approx 93$

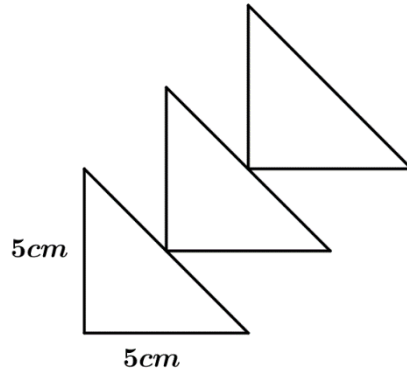
Dus $WZ = XW - XZ \approx 66$ cm.

- d. Teken bij de onderstaande constructie eerst het midden van $A'B'$. Teken daarna de diagonaal door K' en het midden van $A'B'$. Het snijpunt van deze diagonaal en de lijn $B'V$ is een hoekpunt van het trapezium. Teken vanuit dit hoekpunt een lijnstuk evenwijdig met $A'B'$. En doe dat ook door K' . Zo ontstaan het derde en het vierde hoekpunt van het trapezium op de foto. Vervolgens kan het trapezium in de perspectieftekening afgemaakt worden.



G-4 Etagère

a.



b. $AL = \sqrt{30,6^2 - 25^2} = \sqrt{311,36} \approx 17,65$
 De afstand van K tot de muur is $3 \cdot 17,65 \approx 53 \text{ cm}$

a. $Opp. ABC = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 25 = 312,5 \text{ cm}^2$
 $Inh. \text{ piramide } K \cdot ABC = \frac{1}{3} \cdot 312,5 \cdot 25 \approx 2604,17 \text{ cm}^3$
 $Tot. inhoud \text{ etagère} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 312,5 \cdot 25 = 7812,5 \text{ cm}^3$
 $Tot. Inh. \text{ etagère} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 312,5 \cdot 25\right) = 7812,5 \text{ cm}^3$

G-5 Het prisma van Sanherib

a. De zeshoek bestaat uit 6 gelijkzijdige driehoeken met zijde 7 (de helft van de totale breedte), dus

$$h^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 7^2 \text{ dus } h^2 = 49 - 12\frac{1}{4} = 36\frac{3}{4}, \text{ en } h = \sqrt{36\frac{1}{4}} \approx 6,062$$

$$Opp. \text{ driehoek} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{36\frac{3}{4}} \approx 21,218$$

$$Opp. \text{ Grondvlak} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{36\frac{3}{4}}\right) \approx 127,31 \text{ cm}^2$$

b. $Inhoud \text{ prisma} = G \cdot h \approx 127,31 \cdot 38 \approx 4838 \text{ cm}^3$

G-6 Parthenon

a. 88 mm breed en 54 mm hoog, verhouding $\frac{88}{54} \approx 1,6$ (kan gulden snede verhouding zijn).

b. Voor: de verhouding van de zijden voldoet (bij benadering) en dit kan bewust gedaan zijn
 Tegen: het komt vaak voor omdat het een mooie, esthetische verhouding is en het kan dus zijn dat het onbewust is toegepast door de Grieken.

c. Teken eerst DJ zo dat BCDJ een vierkant is (bijvoorbeeld door met een passer 'punt B om punt C heen te cirkelen'). Teken daarna FK zo dat DEFK een vierkant is. Teken tenslotte IL zo dat FGIL een vierkant is.

- d. Bijvoorbeeld: CE, CD en DE met $\frac{EC}{CD} = \frac{CD}{DE}$; EG, EF en FG met $\frac{EG}{EF} = \frac{EF}{FG}$; GJ, GI en IJ met $\frac{GJ}{GI} = \frac{GI}{IJ}$
- e. $GJ = 1 + \varphi = DE$, $EG = 1 + 2\varphi (= \varphi + \varphi^2) = BC$; $EC = 2 + 3\varphi (= \varphi^2 + \varphi^3) = AH$;
 $AC = 3 + 5\varphi (= \varphi^3 + \varphi^4)$

Bijlage 1 Examenprogramma

Het eindexamen

Het eindexamen bestaat uit het centraal examen en het schoolexamen.

Het examenprogramma bestaat uit de volgende domeinen:

Domein A	Vaardigheden
Domein B	Algebra en tellen
Domein C	Verbanden
Domein D	Veranderingen
Domein E	Statistiek en kansrekening
Domein F	Logisch redeneren
Domein G	Vorm en ruimte
Domein H	Keuzeonderwerpen

Het centraal examen

Het centraal examen heeft betrekking op de domeinen B, C, D, F en G in combinatie met de vaardigheden uit domein A.

Het CvTE stelt het aantal en de tijdsduur van de zittingen van het centraal examen vast.

Het CvTE maakt indien nodig een specificatie bekend van de examenstof van het centraal examen.

Het schoolexamen

Het schoolexamen heeft betrekking op domein A en:

- de domeinen E en H;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: een of meer domeinen of subdomeinen waarop het centraal examen betrekking heeft;
- indien het bevoegd gezag daarvoor kiest: andere vakonderdelen, die per kandidaat kunnen verschillen.

De examenstof

Domein A: Vaardigheden

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

1. De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

2. De kandidaat herkent de betekenis van wiskunde in de maatschappij en in cultuurhistorische contexten en kan deze in concrete situaties beschrijven.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

3. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige vaardigheden, waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren – en kan daarbij ICT functioneel gebruiken.

Domein B: Algebra en tellen

Subdomein B1: Rekenen en algebra

4. De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen en kan daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen.

Subdomein B2: Telproblemen

5. De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.

Domein C: Verbanden

6. De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de verschillende representaties doelgericht gebruiken, kan bijbehorende vergelijkingen oplossen, waar nodig met behulp van ICT, en kan periodieke verschijnselen beschrijven.

Domein D: Veranderingen

7. De kandidaat kan het veranderingsgedrag van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies en de regelmaat in rijen doelgericht beschrijven en gebruiken.

Domein E: Statistiek en kansrekening

Subdomein E1: Probleemstelling en onderzoeksontwerp

8. De kandidaat kan bij een probleemstelling die zich leent voor een statistische aanpak een plan maken om antwoord op de probleemstelling te verkrijgen, waarbij geschikte variabelen worden gekozen.

Subdomein E2: Visualisatie van data

9. De kandidaat kan verkregen data verwerken in een geschikte tabel of grafiek en deze op waarde interpreteren.

Subdomein E3: Kwantificering

10. De kandidaat kan de verkregen data samenvatten in voor de probleemstelling geschikte maten en hieraan interpretaties verbinden.

Subdomein E4: Kansbegrip

11. De kandidaat kan het kansbegrip gebruiken om bij een toevalsproces de kans op een bepaalde uitkomst of gebeurtenis te bepalen aan de hand van een diagram, combinatoriek, kansregels en simulatie.

Subdomein E5: Kansverdelingen

12. De kandidaat kan aangeven in welke situatie een toevalsvariabele een bepaalde kansverdeling bezit en van die verdeling de karakteristieke verwachtingswaarde en standaardafwijking hanteren.

Subdomein E6: Statistiek met ICT

13. De kandidaat beheerst statistisch ICT-gebruik in relatie met de subdomeinen E1, E2, E3, E4 en E5 om grote datasets te interpreteren en te analyseren.

Domein F: Logisch redeneren

14. De kandidaat kan logische redeneringen analyseren op correct gebruik.

Domein G: Vorm en ruimte

15. De kandidaat kan van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en op basis daarvan conclusies trekken over dit object.

Domein H: Keuzeonderwerpen

Bijlage 2 Examenwerkwoorden

Er is een gecombineerde lijst voor examenwerkwoorden opgesteld voor natuur- en wiskunde. Er is gestreefd naar maximale afstemming en overlap. De complete lijst voor wis- en natuurkunde is omstreeks maart 2017 in een nieuwsbericht gepubliceerd op Examenblad.nl.

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde. Als in een wiskunde examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

	<p>Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.</p>
	<p><i>Alleen voor wiskunde B geldt:</i> de toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van beantwoorden.</p>
Algebraïsch / op algebraïsche wijze (alleen wiskunde B)	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze (alleen wiskunde B)	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. ----- *Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid $5/x < x$ exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid $5/x = x$ exact wordt opgelost. De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat) (alleen wiskunde B)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt

Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

Bijlage 3 Begrippenlijst

De in deze lijst opgenomen begrippen worden bij de kandidaten van het betreffende centraal examen wiskunde bekend verondersteld. Zij kunnen zonder nadere toelichting in examenvragen worden gebruikt.

In deze lijst zijn die wiskundige begrippen opgenoemd die vermeld zijn onder de parate kennis bij de specificaties of voortvloeien uit de parate en productieve vaardigheden. Deze lijst met begrippen is niet uitputtend. Zo zijn begrippen die als voorkennis worden beschouwd, niet opgenomen.

Bij de *standaardfuncties* moet de kandidaat de *karakteristieke* eigenschappen kennen. Bij wiskunde A havo en wiskunde C vwo wordt in het examen niet over 'functies' maar over 'verbanden' gesproken, de functienotaties $x \rightarrow \dots$ of $f(x) = \dots$ worden hier ook niet gebruikt.

In onderstaande tabel dient voor wiskunde A havo en wiskunde C vwo dan ook overal voor 'functies' 'verbanden' te worden gelezen.

Functies/verbanden	variabele	havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	grootheid, eenheid		x			x
	absoluut, relatief	x		x		
	karakteristieke eigenschappen van een functie		x			x
	domein		x			x
	bereik		x			x
	nulpunt		x			x
	extreem, extreme waarde		x		x	x
	maximum(waarde)	x	x	x	x	x
	minimum(waarde)	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) stijgen	x	x	x	x	x
	(constant, toenemend of afnemend) dalen	x	x	x	x	x
	karakteristieke eigenschappen van een grafiek		x			x
	snijpunt(en) met x - en y -as	x	x	x	x	x
	top		x	x	x	x
	buigpunt					x
	randpunt		x			x
	symmetrie		x			x
	asymptotisch gedrag		x	x^1	x^1	x
	verticale en horizontale asymptoot		x			x^2
	scheve asymptoot					x^2
	standaardfuncties	x	x		x	x
	lineaire (of eerstegraads) functies	x	x	x	x	x
	richtingscoëfficiënt	x	x	x	x	x

¹ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

² Deze begrippen ook in relatie met limieten

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	kwadratische (of tweedegraads) functies		x	x	x	x
	parabool		x			x
	machtsfuncties		x	x	x	x
	wortelfuncties		x			x
	exponentiële functies	x	x	x	x	x
	grondtal	x	x		x	x
	exponent	x	x	x	x	x
	beginwaarde	x	x	x	x	x
	groefactor	x	x	x	x	x
	groeipercentage	x	x	x	x	x
	halveringstijd	x	x	x	x	x
	verdubbelingstijd	x	x	x	x	x
	logaritmische functies		x	x	x	x
	logaritme		x	x	x	x
	natuurlijke logaritme				x	x
	logaritmische schaalverdeling	x	✗	x	x	✗
	goniometrische functies		x		x ³	x
	sinusoïde		x			x
	radiaal		x			x
	periodiek verschijnsel		x	x		x
	periode		x	x	x	x
	frequentie					x
	trillingstijd					x
	amplitude		x	x	x	x
	evenwichtsstand		x		x	x
	evenwichtswaarde			x		
	sinusmodel					x
	harmonische trilling					x
	som-, verschil en verdubbelingsformules					x
	gebroken lineaire functies		x			x
	hyperbool		x			x
	absolute-waarde-functies					x
	vergelijkingen en ongelijkheden	x	x	x	x	x
	lineaire of eerstegraadsvergelijking	x	x	x	x	x
	kwadratische of tweedegraadsvergelijking		x			x
	abc-formule		x			x
	(lineair) interpoleren en extrapoleren	x		x	x	
	trend			x		
	somfunctie		x	x ⁴	x ⁴	x
	verschilfunctie		x	x ⁴	x ⁴	x

³ Alleen de sinusfunctie

⁴ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

	havo		vwo		
	wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
			x^4	x^4	x
			x^4	x^4	x
		x	x^5	x^5	x
		x^5			x
		x			x
		x			x
		x		x	x
		x			x
				x	
	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x
		x			x
		x			x
					x
					x
					x
		x			x
Meetkunde			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
		x	x		x
					x
			x		
			x		
		x			x
	x	x		x	x
		x			x
		x			x
					x
					x
					x
					x
					x

⁵ Termen hoeven niet gekend te worden, wel de bijbehorende activiteiten

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	lengte, richtingshoek, kentallen, componenten van een vector					x
	inproduct van twee vectoren					x
	vectorvoorstelling van een lijn, steunvector, richtingsvector					x
	zwaartepunt					x
	middelloodlijn					x
	bissectrice (deellijn)					x
Veranderingen	interval		x	x	x	x
	intervalnotaties		x			x
	de Δ -notatie voor een differentie		x			x
	differentiequotiënt		x		x	x
	gemiddelde verandering			x	x	
	toenamediagram		x		x	*
	helling		x	x	x	x
	steilheid		x			x
	hellinggrafiek				x	
	rijen, inclusief notaties			x	x	
	rekenkundige rij				x	
	meetkundige rij				x	
	somrij				x	
	Σ -teken				x	
	directe formule			x	x	
	recursieve formule			x	x	
Differentiaal- en integraalrekening	afgeleide (functie), inclusief notaties		x		x	x
	tweede afgeleide, inclusief notaties					x
	somregel en verschilregel		x		x	x
	productregel				x	x
	quotiëntregel				x	x
	kettingregel		x		x	x
	raaklijn		x		x	x
	integraal, integrand, primitieve					x
	omwentelingslichaam					x
	(baan)snelheid, (baan)versnelling					x
Statistiek	betrouwbaarheid, betrouwbaarheidsinterval	x				
	centrummaat, centrum	x				
	gemiddelde	x				
	mediaan	x				
	modus, modaal	x				
	data	x				
	discreet	x				
	continu	x				

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	kwantitatief	x				
	kwalitatief	x				
	nominaal	x				
	ordinaal	x				
	absoluut	x				
	relatief	x				
	frequentie	x				
	groepen	x				
	kenmerk	x				
	klasse, klassenindeling	x				
	verdeling	x				
	klokvormig	x				
	meertoppig	x				
	uniform	x				
	scheef	x				
	staart	x				
	uitschieter	x				
	normale verdeling	x				
	de drie vuistregels van de normale verdeling	x				
	populatie	x				
	populatiegemiddelde	x				
	populatieproportie	x				
	representatie / presentatie	x				
	dotplot	x				
	staafdiagram	x				
	cirkeldiagram	x				
	steelbladdiagram	x				
	lijndiagram	x				
	(cumulatief / relatief) frequentiepolygoon	x				
	boxplot	x				
	(cumulatieve) frequentietabel	x				
	kruistabel	x				
	puntenwolk, spreidingsdiagram	x				
	spreidingsmaat, spreiding	x				
	interkwartielafstand	x				
	standaardafwijking	x				
	spreidingsbreedte	x				
	steekproef	x				
	aselect	x				
	representatief	x				
	steekproefomvang	x				
	steekproevenverdeling	x				
	steekproefgemiddelde	x				
	steekproefproportie	x				
Combinatoriek	boomdiagram			x	x	

		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
	wegendiagram			x	x	
	rooster			x	x	
	permutaties			x	x	
	combinaties			x	x	
	driehoek van Pascal			x		
Logisch redeneren	Venn-diagram			x		
	nodige, voldoende voorwaarde			x		
	contradictie			x		
	paradox			x		
	als-dan-redenering			x		
	hier-uit-volgt-conclusie			x		
	tegenvoorbeeld			x		

Bijlage 4 Algebraïsche vaardigheden

In deze bijlage worden de eisen wat betreft algebraïsche vaardigheden beschreven voor alle wiskundevakken met een centraal examen. Algebraïsche vaardigheden zijn geen doel op zichzelf, maar onderdeel van wiskundige activiteiten. De algebraïsche vaardigheden moeten in samenhang met het betreffende programma worden gelezen. Door algebraïsche expressies te bewerken kan bijvoorbeeld de juistheid van beweringen worden aangetoond, het rekenwerk vaak worden vereenvoudigd of vergelijkingen zo herschreven worden dat ze exact zijn op te lossen. Deze algebraïsche vaardigheden zijn onderverdeeld in specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden.

Bij *specifieke* algebraïsche vaardigheden gaat het om parate kennis en het vlot kunnen toepassen van de bijbehorende vaardigheden op de voorkomende algebraïsche expressies. Deze vaardigheden hebben betrekking op algoritmisch werken en algebraïsch rekenen. Het gaat hier bijvoorbeeld om kennis en gebruik van rekenregels, inclusief het werken met haakjes, bij het invullen van getallen of variabelen in een expressie en het gebruik van algoritmen om een vergelijking op te lossen.

Bij *algemene* algebraïsche vaardigheden spelen aspecten als aanpak, globale strategie, het herkennen van structuren en methoden, en doelgerichtheid een rol. De kandidaten moeten de structuur van een expressie kunnen herkennen, moeten kwalitatief kunnen redeneren aan de hand van een formule (zoals stijgen/dalen, symmetrie en asymptotisch gedrag), moeten een formule kunnen opstellen door het generaliseren van getallenvoorbeelden of het combineren van bekende formules, moeten verbanden zien tussen de verschillende representaties van een functie en moeten kunnen wisselen tussen 'betekenisloos manipuleren' en betekenis toekennen aan de variabelen en parameters.

Samenvattend zijn de specifieke vaardigheden die vaardigheden waarvan wordt verwacht dat de kandidaat deze snel en geroutineerd kan uitvoeren, terwijl voor de algemene vaardigheden de kandidaat in staat moet zijn met inzicht en vooruit denkend te handelen.

Bij de onderstaande opsomming van specifieke vaardigheden geldt zeker dat een deel (wellicht alleen in zijn grondvorm) reeds bekend verondersteld mag worden vanuit de onderbouw. Denk bijvoorbeeld aan de voorrangsregels en het werken met haakjes, eenvoudige breukvormen en wortels.

Op de plaats van A , B , C en D in de volgende tabellen kunnen ook eenvoudige expressies staan, zoals $ax+b$, $\frac{a}{x}$ en x^2 .

Niet aan de orde komen de regels die horen bij het differentiëren.

De vaardigheden genoemd bij categorieën A t/m D moeten in beide richtingen kunnen worden uitgevoerd, tenzij anders is vermeld. Beperkende voorwaarden zoals bijvoorbeeld noemers van breuken zijn ongelijk 0, worden niet vermeld.

Hoewel bij het samenstellen van de kruisjeslijst met de algebraïsche vaardigheden de grootst mogelijke nauwkeurigheid is nagestreefd, kan niet gegarandeerd worden dat deze volledig is.

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
A. Breukvormen	1. $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{A}{B} + C = \frac{A + BC}{B}$	x	x	x	x	x
	3. $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{A}{\frac{B}{C}} = \frac{A \cdot C}{B}$	x	x	x	x	x
B. Wortelvormen	1. $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$	x	x	x	x	x
	2. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	x	x	x	x	x
C. Bijzondere producten	1. haakjes wegwerken en ontbinden in factoren: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	2. $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$ havo A, vwo A en vwo C: alleen haakjes wegwerken	x	x	x	x	x
	3. $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$		x			x
	4. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$		x			x
	5. kwadraat afsplitsen: $x^2 + px + q$ schrijven in de vorm $(x+r)^2 + s$		x			x

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
D. Machten en logaritmen	1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	x	x	x	x	x
	2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	x	x	x	x	x
	3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	x	x	x	x	x
	4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$	x	x	x	x	x
	5. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	x	x	x	x	x
	6. $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ met p positief en geheel		x	x	x	x
	7. ${}^s \log(a) + {}^s \log(b) = {}^s \log(a \cdot b)$		x		x	x
	8. ${}^s \log(a) - {}^s \log(b) = {}^s \log\left(\frac{a}{b}\right)$		x		x	x
	9. ${}^s \log(a^p) = p \cdot {}^s \log(a)$		x		x	x
	10. ${}^s \log(a) = \frac{p \log(a)}{p \log(g)}$ vwo C: alleen $p = 10$		x	x	x	x
	11. ${}^s \log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$				x	x
E. Goniometrie	voor formules zie betreffende domein		x			x
F. Herleidingen uitvoeren aan de hand van de elementen genoemd bij A tot en met D	1. via substitutie van getallen	x	x	x	x	x
	2. via substitutie van expressies	x	x	x	x	x
	3. via het omwerken van formules	x	x	x	x	x
G. Vergelijkingen oplossen met behelp van algemene vormen en formules herleiden (voor wiA en wiC worden deze vaardigheden uitsluitend gebruikt voor het herleiden van formules)	1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ of $B = 0$		x	x		x
	2. $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0$ of $B = C$ havo A, vwo A en vwo C: $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \Rightarrow B = C$	x	x	x	x	x
	3. $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	4. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$	x	x	x	x	x
	5. $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B$ of $A = -B$		x		x	x
	6. $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$	x	x	x	x	x

Specifieke vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
H. Algoritmen t.b.v. het oplossen van vergelijkingen en het herleiden van formules (voor wiA en wiC worden deze vaardigheden uitsluitend gebruikt voor het herleiden van formules)	1. eerstegraadsvergelijkingen $ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c-b}{a}$	x	x	x	x	x
	2. tweedegraadsvergelijkingen abc-formule $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		x			x
	3. $x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$ als n oneven is $x^n = c \Rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}$ of $x = -c^{\frac{1}{n}}$ als n even is		x	x	x	x
	4. $g^x = a \Rightarrow x = {}^g\log(a)$		x	x	x	x
	5. $e^x = a \Rightarrow x = \ln(a)$				x	x
	6. ${}^g\log(x) = b \Rightarrow x = g^b$		x	x	x	x
	7. $\ln(x) = b \Rightarrow x = e^b$				x	x
	8. $ x = c \Rightarrow x = c$ of $x = -c$					x
I. Vergelijkingen oplossen met behulp van standaardfuncties	1. $f(A) = c$		x			x
	2. $f(A) = f(B)$		x			x
J. Vergelijkingen en ongelijkheden van het type $f(x) = g(x)$ resp. $f(x) \geq g(x)$ oplossen	1. grafisch, waaronder ICT	x	x	x	x	x
	2. vergelijkingen en ongelijkheden algebraïsch dan wel exact, indien algebraïsch/exact oplosbaar		x			x

Algemene vaardigheden		havo		vwo		
		wiA	wiB	wiC	wiA	wiB
K. Formules opstellen	1. door variabelen te kiezen bij een probleemsituatie	x	x	x	x	x
	2. van standaardfuncties					
	a. eerstegraads/lineaire functie	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfunctie		x		x	x
	c. exponentiële functie	x	x	x	x	x
d. logaritmische functie		x		x	x	
e. goniometrische functie		x		x ⁶	x	
f. machtsfunctie		x		x	x	
g. absolute waarde functie					x	
3. door generaliseren via getallenvoorbeelden	x	x	x	x	x	
4. door schakelen van formules	x	x	x	x	x	
L. Expressies herkennen	1. vaststellen of een (deel)expressie behoort tot een van de volgende families					
	a. eerstegraads/lineaire functies	x	x	x	x	x
	b. tweedegraadsfuncties		x	x	x	x
	c. exponentiële functies	x	x	x	x	x
	d. logaritmische functies		x	x	x	x
	e. goniometrische functies		x		x	x
	f. machtsfuncties		x	x	x	x
	2. structuur van een expressie vaststellen	x	x	x	x	x
3. rol van een voorkomende parameter bepalen	x	x		x	x	
M. Karakteristieken bepalen	kwalitatief redeneren over expressies of delen daarvan met betrekking tot karakteristieken als					
	a. uiterste waarden	x	x	x	x	x
	b. stijgen of dalen	x	x	x	x	x
	c. asymptotisch gedrag	x	x	x	x	x
N. Algebraïsche expressies reduceren en representeren	1. complexe delen van een expressie vervangen door 'plaatsvervangers' zodat herkenbare expressies ontstaan	x	x	x	x	x
	2. flexibel kunnen wisselen tussen betekenis toekennen aan symbolen en betekenisloos kunnen manipuleren		x			x
	3. flexibel verschillende representaties van functies (formule, tabel, grafiek) kunnen inzetten en tussen deze representaties kunnen wisselen	x	x	x	x	x

⁶ alleen de sinusfunctie

