Examen VWO

2018

tijdvak 1
maandag 14 mei
13.30 - 16.30 uur

oud programma **wiskunde C**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S) = n \cdot E(X) \qquad \sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X) \qquad \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X) = n \cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X < g) = P(Z < \dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Invloed

Bij verkiezingen wordt vaak gekeken naar het **opkomstpercentage**, het percentage van de stemgerechtigden dat een stem uitbrengt.
In de periode 1986-1998 daalde het opkomstpercentage voor de Tweede Kamerverkiezingen voortdurend. In 1986 brachten 9 199 621 van de 10 727 701 stemgerechtigden hun stem uit, in 1998 waren dat er 8 919 787 van de 11 112 189.

2p **1** Laat zien dat het opkomstpercentage in de periode 1986-1998 inderdaad is afgenomen.

Eén van de redenen die vaak genoemd wordt om niet te gaan stemmen is ‘het gevoel geen invloed te hebben’.
Het vervolg van deze opgave gaat over invloed bij beslissingen die via een stemming tot stand komen.

Als voorbeeld bekijken we een groep van 9 personen, die bij meerderheid mogen beslissen over het al dan niet aanvaarden van een voorstel.
Eén van hen is Johan. Hij vraagt zich af hoe groot de kans is dat zijn stem de doorslag geeft. Johans stem is doorslaggevend als van de andere groepsleden er 4 voor het voorstel en 4 tegen het voorstel stemmen.
We gaan uit van de volgende veronderstellingen:

– ieder lid van de groep brengt zijn stem uit;
– ieder lid van de groep heeft dezelfde kans p om vóór het voorstel te stemmen.

4p **2** Bereken de kans dat Johans stem doorslaggevend is als $p = 0{,}8$.

We bekijken nu een groep van 11 personen. De kans dat Johans stem de doorslag geeft, is dan $P_{\text{Johan}} = 252 \cdot p^5 \cdot (1 - p)^5$. Ook hier heeft ieder lid van de groep dezelfde kans p om vóór het voorstel te stemmen.

3p **3** Onderzoek bij welke waarde van p de kans dat Johans stem doorslaggevend is, maximaal is.

De kans P_{Johan} dat Johans stem doorslaggevend is bij een dergelijke stemming hangt af van het aantal medestemgerechtigden en van de waarde van p.

We gaan vanaf nu uit van een situatie met $2n$ medestemgerechtigden en $p = 0,5$.

De bedoelde kans is dan gelijk aan $P_{\text{Johan}} = \binom{2n}{n} \cdot 0,5^{2n}$.

Voor grote waarden van n kun je deze kans goed benaderen met de volgende formule:

$$P_{\text{Johan}} \approx \frac{0,564}{\sqrt{n}}$$

4p **4** Bereken hoe groot het verschil is tussen de benaderde kans en de echte kans als er 50 medestemgerechtigden zijn.

Naarmate een groep groter wordt, neemt de kans dat Johans stem beslissend is natuurlijk af.

We bekijken dit verschijnsel bij de formule $P_{\text{Johan}} \approx \frac{0,564}{\sqrt{n}}$.

Johan vraagt zich af wat er gebeurt met de kans dat zijn stem doorslaggevend is als de groep medestemgerechtigden groter wordt.

3p **5** Beredeneer hoeveel keer zo klein deze kans wordt als het aantal medestemgerechtigden vier keer zo groot wordt.

Bridgedrive

Bridge is een kaartspel waarbij een team van twee spelers tegen een ander team van twee spelers speelt. Zo'n team van twee spelers heet een paar. De Oldenzaalse Bridge Club organiseert ieder jaar een bridgedrive (een toernooi) waar een groot aantal paren aan deelneemt.
Aan de bridgedrive van 2008 namen 192 paren deel. Elk paar speelde acht rondes waarin ze in elke ronde vier spellen speelden. Nadat elk paar deze 32 spellen had gespeeld werden de eindscores bepaald. Het paar met de hoogste eindscore werd de winnaar.

3p **6** Bereken hoeveel keer er tijdens deze bridgedrive een spelletje bridge werd gespeeld.

De bridgedrive wordt gespeeld op 16 verschillende horecalocaties in Oldenzaal. Op elke locatie spelen evenveel paren. Na vier spellen wisselen de paren van locatie volgens een schema dat de spelers van tevoren niet bekend is.

Het paar Hendriks-Hendriks zit klaar voor de eerste ronde. Zij vragen zich af of het paar Van Zomeren-Zenderink tijdens de eerste ronde op dezelfde locatie speelt.

3p **7** Bereken de kans dat het paar Van Zomeren-Zenderink de eerste ronde op dezelfde locatie speelt als het paar Hendriks-Hendriks.

Per spel krijgt elk paar een score op een schaal van 0 tot en met 100.
Na afloop van de drive wordt voor elk paar de totale score gedeeld door het aantal gespeelde spellen. Dit geeft een eindscore die wordt afgerond op twee decimalen. Het paar met de hoogste eindscore krijgt positie 1 en wint de hoofdprijs.

We nemen aan dat in 2008 de eindscores normaal verdeeld waren met gemiddelde 50,00 en standaardafwijking 7,12. Het paar Hendriks-Hendriks had een eindscore van 54,66.

4p **8** Bereken op grond hiervan de positie van dit paar in de eindklassering.

In 2007 namen 190 paren deel aan de drive. Hun eindscores staan in een tabel op de uitwerkbijlage. Het gemiddelde van deze eindscores is 49,93 en de standaardafwijking is 7,07.
Men vraagt zich af of deze scores ook bij benadering normaal verdeeld zijn. Dit is te onderzoeken door te controleren of deze gegevens in overeenstemming zijn met onder andere de volgende twee regels voor de normale verdeling:

1 de 68%-vuistregel;
2 de 95%-vuistregel.

Aan de eerste regel (de 68%-vuistregel) is voldaan.

3p **9** Onderzoek of de scores in de tabel op de uitwerkbijlage ook aan de tweede regel voldoen.

De wereldbevolking bedroeg in 2010 ongeveer 6800 miljoen (6,8 miljard) mensen. Volgens schattingen uit dat jaar werden er toen op de wereld ruim 500 talen gesproken.
In deze opgave verstaan we onder sprekers van een taal alleen de mensen voor wie deze taal hun moedertaal is.
Sommige talen worden door meer dan 100 miljoen mensen gesproken, maar er zijn ook talen die nog slechts door enkele tientallen mensen gesproken worden.
Hoe meer mensen een taal spreken, hoe groter we die taal noemen.
Alle aantallen in deze opgave hebben betrekking op het jaar 2010 en zijn benaderingen op grond van schattingen.

De grootste taal is het Mandarijn met 800 miljoen sprekers.
De kans dat van 6 willekeurig gekozen mensen uit de totale wereldbevolking er minstens één Mandarijn spreekt, is groter dan 0,5.

4p **10** Bereken deze kans in drie decimalen nauwkeurig.

Van alle gesproken talen is er een ranglijst waar de talen op volgorde van veel naar weinig sprekers staan. De top-15 van de meest gesproken talen in 2010 staat in onderstaande tabel.

tabel

1	Mandarijn	800 000 000
2	Spaans	358 000 000
3	Engels	350 000 000
4	Hindi/Urdu	240 000 000
5	Bengaals	170 000 000
6	Russisch	160 000 000
7	Portugees	150 000 000
8	Arabisch	150 000 000
9	Japans	126 000 000
10	Duits	100 000 000
11	Wu	90 000 000
12	Javaans	70 000 000
13	Punjab	70 000 000
14	Frans	70 000 000
15	Telugu	70 000 000

Deze 15 talen hebben samen 2974 miljoen sprekers. Van de ruim 500 talen zijn er 86 talen met 10 miljoen of meer sprekers. Op de 44e plaats staat het Nederlands met 20 miljoen sprekers. Hieruit kun je concluderen dat de talen op de plaatsen 45 tot en met 86 elk minstens 10 miljoen en hoogstens 20 miljoen sprekers hebben.

Met deze gegevens kun je niet het exacte totaal aantal sprekers van de 86 talen met meer dan 10 miljoen sprekers berekenen. Wel is het mogelijk om een onder- en een bovengrens van dit aantal te berekenen.

4p **11** Laat zien dat het mogelijk is dat het totaal aantal sprekers van de eerste 86 talen groter is dan 5,7 miljard.

Onderzoekers willen een formule opstellen waarmee het totaal aantal sprekers van de n grootste talen berekend kan worden als n gegeven is. Voor zo'n formule moet dus bijvoorbeeld gelden dat het totaal aantal sprekers gelijk is aan 2,974 miljard voor $n = 15$.
Neem aan dat geen enkel tweetal talen precies hetzelfde aantal sprekers heeft.

3p **12** Beredeneer dat de grafiek van het totaal aantal sprekers afnemend stijgend is.

Het verband tussen het totaal aantal sprekers A van de n grootste talen en n kan worden benaderd met de volgende formule:

$$A = 0{,}92 \cdot n^{0{,}43}$$

Hierbij is n het plaatsnummer van een taal en A het totaal aantal sprekers in miljarden van de n grootste talen.

Volgens deze formule zouden er voor de 6,8 miljard sprekers veel minder dan de eerder genoemde ruim 500 talen zijn.

3p **13** Bereken hoeveel talen er volgens de formule zouden zijn.

Op sommige stukken snelweg staat een bord met de aansporing 'Rij schoner, rij 80 in z'n 5.'
Naar aanleiding hiervan onderzocht een journalist hoe het benzineverbruik van een auto afhangt van de snelheid en de versnelling waarin de auto rijdt.

De journalist reed 's nachts 6 keer een afstand van 10 km op een recht stuk snelweg. Met behulp van cruise control reed hij eerst met 80 km per uur in de derde, vierde en vijfde versnelling en vervolgens met 90 km per uur in de derde, vierde en vijfde versnelling. Elke seconde werd het benzineverbruik geregistreerd.

4p **14** Bereken hoeveel meetgegevens de journalist op deze manier verzamelde.

In de vijfde versnelling is de auto steeds het zuinigst. In de tabel staat de literafstand L (het aantal kilometer dat je per liter benzine kunt rijden) van de auto in de vijfde versnelling bij verschillende snelheden. In de tabel kun je bijvoorbeeld zien dat de literafstand van de auto bij een snelheid van 80 km per uur 21,62 km is. Dat betekent dat je bij deze snelheid 21,62 km kunt rijden met 1 liter benzine.

tabel
literafstand en de bijbehorende snelheid in de vijfde versnelling

snelheid v (km per uur)	80	90	100	110
literafstand L (km)	21,62	19,88	17,82	15,95

De journalist stelde dat er tot een snelheid van 110 km per uur bij benadering sprake was van een lineair verband tussen de literafstand L en de snelheid v.

4p **15** Stel een formule op van dit verband.

In werkelijkheid zal bij snelheden van ten minste 90 km per uur het verband tussen de literafstand en de snelheid niet lineair zijn. Het is ook denkbaar dat de afname van de literafstand exponentieel verloopt.

4p **16** Bereken in dat geval de groeifactor per 10 km per uur en bereken daarmee bij welke snelheid de literafstand 10 km zal zijn.

In een voorlichtingsfolder over zuinig rijden lezen we: 'Een zuinige snelheid is 90 km per uur. Als je 120 km per uur rijdt, dan neemt de literafstand met 30% af. Rijd je 140 km per uur, dan is de literafstand al met 48% afgenomen.'
Je kunt met bovenstaande gegevens berekenen met hoeveel procent de literafstand afneemt als de snelheid toeneemt van 120 km per uur naar 140 km per uur.

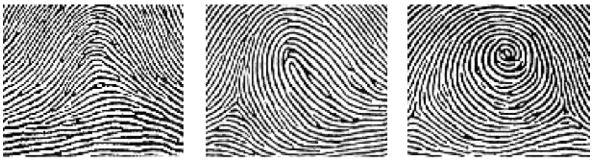
4p **17** Bereken dit percentage.

Vingerafdrukken

Na een misdrijf zoekt de politie vaak naar vingerafdrukken. Van ieder mens zijn de vingerafdrukken uniek. Daardoor kan men aan de hand van vingerafdrukken vaststellen wie er op de plaats van het misdrijf geweest is. De gevonden vingerafdrukken vergelijkt men met de vingerafdrukken van een verdachte of met de vingerafdrukken in een databank.
Omdat het vergelijken van vingerafdrukken veel werk is, deelt men de vingerafdrukken in groepen in.

Een bekend systeem is de Henry classificatie. Hierin onderscheidt men drie patronen: de **boog**, de **lus** en de **kring**. Elke vingerafdruk heeft één van deze patronen. Zie figuur 1.

figuur 1



De vingers worden genummerd, te beginnen bij de rechterduim. Een vingerafdruk met een boog of lus krijgt de waarde 0. Een vingerafdruk met een kring krijgt de waarde zoals aangegeven in tabel 1.

tabel 1

	R duim	**R wijs-vinger**	**R middel-vinger**	**R ring-vinger**	**R pink**	**L duim**	**L wijs-vinger**	**L middel-vinger**	**L ring-vinger**	**L pink**
vinger-nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
waarde (indien kring)	16	16	8	8	4	4	2	2	1	1

De Henry classificatie voor een **vingerafdrukkenset** van tien vingers wordt nu berekend met de volgende formule:

$$H = \frac{1 + (\text{som van de waarden van de even vingers})}{1 + (\text{som van de waarden van de oneven vingers})}$$

De waarde van H kan bepaalde grenzen niet overschrijden.

4p **18** Bereken de minimale en de maximale waarde van H.

In tabel 2 staat een vingerafdrukkenset uit de databank.

tabel 2

vingernummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
boog (B), lus (L) of kring (K)	L	K	B	B	K	B	L	B	K	K

Voor de vingerafdrukkenset van tabel 2 is de Henry classificatie:

$$H = \frac{1+(16+0+0+0+1)}{1+(0+0+4+0+1)} = \frac{18}{6}$$

Dit wordt genoteerd als een breuk en niet vereenvoudigd.

In tabel 3 staat een andere vingerafdrukkenset uit de databank.

tabel 3

vingernummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
boog (B), lus (L) of kring (K)	K	B	B	L	K	B	L	K	L	L

3p **19** Bereken de Henry classificatie van de vingerafdrukkenset in tabel 3.

Met dit systeem is het ook mogelijk om bij een gegeven Henry classificatie terug te vinden welke vingers een kringpatroon hebben.

Een vingerafdrukkenset heeft Henry classificatie $\frac{7}{14}$.

4p **20** Onderzoek welke vingers van deze vingerafdrukkenset een kringpatroon hebben.

De getallen 16, 8, 4, 2 en 1 in tabel 1 zijn zo gekozen dat met de optelling hiervan alle mogelijke waarden tussen het minimum en maximum gemaakt kunnen worden.
De Henry classificatie mag niet vereenvoudigd worden, omdat er meerdere vingerafdrukkensets zijn waarvan we de Henry classificatie kunnen vereenvoudigen tot bijvoorbeeld het getal 3, zoals de set uit het eerste voorbeeld met Henry classificatie $\frac{18}{6}$.

4p **21** Onderzoek van hoeveel vingerafdrukkensets de Henry classificatie kan worden vereenvoudigd tot 3.

Het is mogelijk dat twee verschillende vingerafdrukken dezelfde Henry classificatie hebben. Om te bepalen of twee vingerafdrukken identiek zijn, kijkt men naast de Henry classificatie naar andere bijzondere punten in het vingerafdrukpatroon.

Een deskundige kiest 12 van zulke bijzondere punten en gaat vervolgens in de databank zoeken naar vingerafdrukken met diezelfde 12 bijzondere punten. Een tweede deskundige kiest onafhankelijk van de eerste ook 12 punten en doet hetzelfde. Als beide deskundigen tot dezelfde conclusie komen staat officieel vast dat de twee vingerafdrukken matchen.

Neem aan dat er in een vingerafdruk 34 bijzondere punten voorkomen en dat elke deskundige hieruit willekeurig 12 punten kiest.

5p **22** Bereken de kans dat de twee deskundigen hierbij samen 24 verschillende punten kiezen.